Métrique de SCHWARZSCHILD

KARL SCHWARZSCHILD (1873-1916)

Karl Schwarzschild est l'aîné d'une famille de six enfants. Son père, de religion juive, est un homme d'affaires prospère de Frankfurt. Sa curiosité pour les étoiles se manifeste dès ses premières années scolaires, lorsqu'il construit un petit télescope. Témoin de cet intérêt, son père le présente à un ami mathématicien qui a un observatoire privé. À 16 ans, il publie deux articles sur les orbites des étoiles doubles. En 1891, il entreprend deux ans d'études à l'Université de Strasbourg, où il développe sa maîtrise de l'astronomie expérimentale. À 20 ans, il entre à l'Université de Munich ; trois ans plus tard, il obtient un doctorat. En 1900, lors d'un congrès, il discute de la possibilité pour l'univers d'avoir une géométrie non euclidienne. De son étude relativiste de la géométrie de l'espace autour d'une masse ponctuelle, il dérive le " rayon de Schwarzschild " qui définit l'horizon ou la frontière d'un trou noir ; c'est la distance au-delà de laquelle, ni la lumière, ni la matière ne peut échapper à la force gravitationnelle du trou noir. Lorsque la guerre éclate, il s'enrôle comme volontaire. Affecté à l'artillerie, sur le front de Russie, il contracte une maladie incurable et il doit rentrer, en mars 1916. Il passe les deux derniers mois de sa vie à l'hôpital.

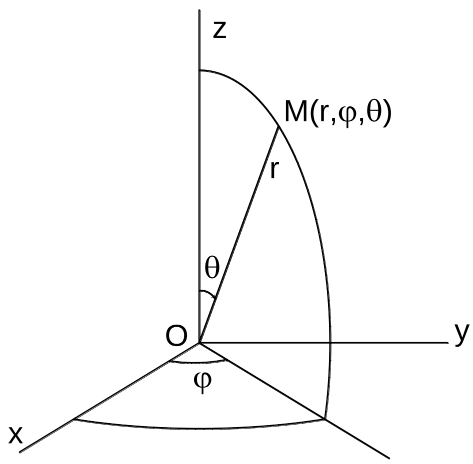
1 – Préambule

L'intérêt de la solution de Shwarzschild est qu'elle est relativement simple et qu'elle permet d'explique la précession du périhélie de Mercure et la déviation de la lumière passant près d'une masse, par exemple le soleil.

Il s'agit d'un problème à symétrie sphérique avec une masse sphérique M. Les coordonnées sont choisie de façon à ce que cette masse soit située à l'origine des coordonnées.

Le champ est étudié à l'extérieur de cette masse, c'est à dire dans un milieu où il n'y a aucune masse. De plus le champ est statique, c'est à dire indépendant du temps.

2 – Mise en équations



Dans un espace plat, par exemple dans l'espace de Minkowski l'élément de longueur s'écrit

$$\boxed{ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)}$$

Dans un espace "courbe" à symétrie sphérique indépendant du temps cette élément doit s'écrire.

$$\boxed{ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)}$$

Dans cette expression il est possible de remplacer dans $A(r), B(r)$ et $C(r)$ r par une fonction quelconque $W(r)$ de r sans changer les propriétés de symétrie sphérique. Le plus commode est de choisir une fonction W telle que $C(W(r)) = 1$. Ce qui revient finalement à avoir

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad (7\text{-}2.2)$$

Les composantes du tenseur métrique sont alors

$$g_{00} = A(r)c^2, g_{11} = -B(r), g_{22} = -r^2, g_{33} = -\sin^2\theta \quad (7\text{-}2.3)$$

Les autres composantes $g_{mn} = 0$ et $m \neq n$

3 – Détermination du tenseur métrique et des symboles de Christoffel

1. Détermination du tenseur métrique et du tenseur de courbure

Section d'équation (suivante)

1.1. Tenseur métrique

Comme un certain nombre d'auteurs, en particulier DIRAC le tenseur métrique est écrit sous la forme

$$\boxed{ds^2 = c^2e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)} \quad (7\text{-}4.1)$$

soit :

$$\boxed{\begin{array}{l} g_{00} = c^2e^{2\nu}, g_{11} = -e^{2\lambda}, g_{22} = -r^2, g_{33} = -r^2\sin^2\theta \\ g_{mn} = 0 \text{ si } m \neq n \\ g^{00} = \dfrac{e^{-2\nu}}{c^2}, g^{11} = -e^{-2\lambda}, g^{22} = -\dfrac{1}{r^2}, g^{33} = -\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \\ g^{mn} = 0 \text{ si } m \neq n \end{array}} \quad (7\text{-}4.2)$$

Les variables sont :

$$\boxed{x^0 = ct,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta \text{ et } x^3 = \varphi} \quad (7\text{-}4.3)$$

Le tenseur métrique est diagonal. Cette propriété simplifie le calcul des composantes du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci.

1.2. Tenseur de Ricci

Pour le calcul des composantes du tenseur les formules vues dans le cours de calcul tensoriel

$$\boxed{\begin{array}{l} R_{\mu\nu} = -\left(\ln\sqrt{\left|\dfrac{g}{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}}\right|}\right)_{,\mu\nu} + \left(\ln\sqrt{|g_{\mu\mu}|}\right)_{,\nu}\left(\ln\sqrt{\left|\dfrac{g}{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}}\right|}\right)_{,\mu} + \left(\ln\sqrt{|g_{\nu\nu}|}\right)_{,\mu}\left(\ln\sqrt{\left|\dfrac{g}{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}}\right|}\right)_{,\nu} \\ \qquad - \displaystyle\sum_{\sigma\neq\mu,\nu}\left(\ln\sqrt{|g_{\sigma\sigma}|}\right)_{,\mu}\left(\ln\sqrt{|g_{\sigma\sigma}|}\right)_{,\nu} \end{array}} \quad (7\text{-}4.4)$$

lorsque $\mu \neq \nu$ et

$$\boxed{\begin{aligned}R_{\mu\mu} &= \left(\ln\sqrt{|g_{\mu\mu}|}\right)_{,\mu}\left(\ln\sqrt{\left|\frac{g}{g_{\mu\mu}}\right|}\right)_{,\mu} - \left(\ln\sqrt{\left|\frac{g}{g_{\mu\mu}}\right|}\right)_{,\mu\mu}\\ &-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\neq\mu}\left[\left(\frac{g_{\mu\mu,\sigma}}{g_{\sigma\sigma}}\right)_{,\sigma}+\frac{g_{\mu\mu,\sigma}}{g_{\sigma\sigma}}\left(\ln\sqrt{\frac{|g|}{g_{\mu\mu}^{\ 2}}}\right)_{,\sigma}+2\left(\left(\ln\sqrt{|g_{\sigma\sigma}|}\right)_{,\mu}\right)^{2}\right]\end{aligned}} \tag{7-4.5}$$

$\ln\sqrt{|g_{00}|}=\nu$, $\ln\sqrt{|g_{11}|}=\lambda$, $\ln\sqrt{|g_{22}|}=\ln r$ et $\ln\sqrt{|g_{33}|}=\ln r+\ln(\sin\theta)$

$\ln\sqrt{|g|}=\ln\sqrt{|g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}|}=\nu+\lambda+2\ln r+\ln(\sin\theta)$.

Un calcul montre que les composantes $R_{\mu\nu}=0$ si $\mu\neq\nu$.

On utilisera pour les autres composantes la formule (7-4.5). Un détail complet des calculs est donné dans le cours de calcul tensoriel. Nous ne donnerons ici que le calcul de R_{00}.

1.2.1. Calcul de R00

Les dérivées par rapport à x $x^0=ct$ sont nulles. Dans *reference a l'equation inseree ici* ne subsiste que

$$R_{00}=-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\neq 0}\left[\left(\frac{g_{00,\sigma}}{g_{\sigma\sigma}}\right)_{,\sigma}+\frac{g_{00,\sigma}}{g_{\sigma\sigma}}\left(\ln\sqrt{\frac{|g|}{g_{00}^{\ 2}}}\right)_{,\sigma}\right]^{2}$$

g_{00} est uniquement fonction de $x^1=r$: $R_{00}=-\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{g_{00,1}}{g_{11}}\right)_{,1}+\dfrac{g_{00,1}}{g_{11}}\left(\ln\sqrt{\dfrac{|g|}{g_{00}^{\ 2}}}\right)_{,1}\right]$

$g_{00,1}=2e^{2\nu}\nu'$, $\dfrac{g_{00,1}}{g_{11}}=-2e^{2(\nu-\lambda)}\nu'$ et le premier terme dans le crochet :

$$\boxed{\left(\frac{g_{00,1}}{g_{11}}\right)_{,1}=-2\frac{d}{dr}\left(e^{2(\nu-\lambda)}\nu'\right)=-2e^{2(\nu-\lambda)}\left[2\left(\nu'-\lambda'\right)\nu'+\nu''\right]} \tag{7-4.6}$$

Pour le deuxième terme $\ln\sqrt{\dfrac{|g|}{g_{00}^{\ 2}}}=\ln\sqrt{|g|}-2\ln\sqrt{|g_{00}|}=-\nu+\lambda+2\ln r+\ln(\sin\theta)$

$$\left(\ln\sqrt{\frac{|g|}{g_{00}^{\ 2}}}\right)_{,1}=\frac{\partial}{\partial r}\left[-\nu+\lambda+2\ln r+\ln(\sin\theta)\right]=-\nu'+\lambda'+\frac{2}{r}$$

$$\boxed{\frac{g_{00,1}}{g_{11}}\left(\ln\sqrt{\frac{|g|}{g_{00}^{\ 2}}}\right)_{,1}=-2e^{2(\nu-\lambda)}\nu'\left(-\nu'+\lambda'+\frac{2}{r}\right)} \tag{7-4.7}$$

Finalement $R_{00}=e^{2(\nu-\lambda)}\left[\left(2\nu'^2-2\lambda'\nu'+\nu''\right)+\nu'\left(-\nu'+\lambda'+\dfrac{2}{r}\right)\right]$

$$\boxed{R_{00} = e^{2(\nu-\lambda)}\left(\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right)} \qquad (7\text{-}4.8)$$

1.2.2. Autres composantes du tenseur de Ricci

$$\boxed{\begin{aligned} &R_{11} = -\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 + \frac{2\lambda'}{r} \\ &R_{22} = 1 - e^{-2\lambda}\left(1 + r\nu' - r\lambda'\right) \\ &R_{33} = \left[1 - e^{-2\lambda}\left(1 + r\nu' - r\lambda'\right)\right]\sin^2\theta = R_{22}\sin^2\theta \end{aligned}} \qquad (7\text{-}4.9)$$

5 – Détermination des coefficients du tenseur métrique

Les équations à résoudre sont $R_{00} = 0, R_{11} = 0$ et $R_{22} = 0$, la quatrième équation $R_{33} = 0$ est vérifiée si $R_{22} = 0$ puisque $R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$. $e^{-2\lambda}$ étant différent de 0, les 3 équations sont :

$$\boxed{-\nu'' + \lambda'\nu' - 2\frac{\nu'}{r} - \nu'^2 = 0} \qquad (7\text{-}4.10)$$

$$\boxed{\nu'' - \lambda'\nu' - 2\frac{\lambda'}{r} + \nu'^2 = 0} \qquad (7\text{-}4.11)$$

$$\boxed{e^{-2\lambda}\left(1 + r\nu' - r\lambda'\right) - 1 = 0} \qquad (7\text{-}4.12)$$

L'addition de (7-4.10) et (7-4.11) donne $\lambda' + \nu' = 0$, et donc $\lambda + \nu = C^{te}$. Dans la métrique $ds^2 = c^2 e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$, lorsque $r \to \infty$, l'espace devient plat et la métrique tend vers la métrique $ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$ de l'espace euclidien. C'est à dire que λ et ν tendent vers 0 et $\lambda + \nu \to 0$ donc comme $\lambda + \nu = C^{te}$

$$\lambda + \nu = 0 \qquad (7\text{-}4.13)$$

Comme $\nu' = -\lambda'$, l'équation (7-4.12) peut s'écrire $e^{-2\lambda}\left(1 - 2r\lambda'\right) = 1$ ou encore $\frac{d}{dr}\left(re^{-2\lambda}\right) = 1$. $re^{-2\lambda} = r + K$. $e^{-2\lambda} = 1 + \frac{K}{r}$.

La composante g_{00} s'écrit alors $g_{00} = c^2 e^{2\nu} = c^2 e^{-2\lambda} = c^2\left(1 + \frac{K}{r}\right)$. cette constante K peut être déterminée en se rapportant à l'approximation newtonienne (Newton retrouvé) $K = -\frac{2GM}{c^2}$. Cette valeur sera justifiée à nouveau dans le calcul des orbites des planètes.

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \qquad (7\text{-}4.14)$$

M est la masse de forme sphérique centrée à l'origine et G est la constante universelle d'attraction ($G = 6,7 \times 10^{-11} N.m^2 kg^{-2}$) Finalement la métrique de Schwarzschild :

$$\boxed{ds^2 = c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2r}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)} \qquad (7\text{-}4.15)$$

Il y a une discontinuité apparente lorsque $1-\frac{2GM}{c^2r_0}=0$. Pour cette valeur r_0 le coefficient de dr^2 devient infini. r_0 est appelé "***rayon de Schwarzschild***".

$$\boxed{r_0 = \frac{2GM}{c^2}} \qquad (7\text{-}4.16)$$

Signification du rayon de Schwarzschild

En mécanique non relativiste un corps en mouvement a une énergie $E=\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$. Sa vitesse de libération est donnée par $\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{r}$. Soit $v_l^2 = 2\frac{GM}{r}$. Pour la Terre $M = 6{,}10\times10^{24}kg, r = 6{,}336\times10^6 m$. $v_l = 11{,}3\text{km/s}$.

La rayon de Schwarzschild est le rayon pour lequel la vitesse de libération est la vitesse de la lumière, toute la masse étant à l'intérieur d'un sphère dont le rayon est inférieur au rayon de Schwarzschild.

Pour le soleil $M = 2\times10^{30}\text{kg}\;\; r_0 \cong 3\text{ km}$.

Pour la Terre $r_0 = 9{,}5\text{ mm}$.

La métrique peut s'écrire :

$$\boxed{ds^2 = c^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)} \qquad (7\text{-}4.17)$$

Les symboles de Christoffel de seconde espèce deviennent

$$\boxed{\begin{array}{llll}
\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\frac{r_0}{r}}{1-\frac{r_0}{r}} & & & \\
\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}c^2\frac{1}{r}\frac{r_0}{r}\left(1-\frac{r_0}{r}\right) & \Gamma^1_{11} = -\Gamma^0_{01} = -\frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\frac{r_0}{r}}{1-\frac{r_0}{r}} & \Gamma^1_{22} = -r\left(1-\frac{r_0}{r}\right) & \Gamma^1_{33} = -r\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\sin^2\theta \\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta & & \\
\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} & \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & &
\end{array}} \qquad (7\text{-}4.18)$$

6 Approximation newtonienne

La métrique de Schwarzschild est la métrique d'un espace présentant une symétrie sphérique et répondant aux équations d'Einstein dans le cas d'une masse concentrée à l'origine des coordonnées. En partant de cette métrique on retrouve, lorsque r est très grand et donc la courbure très faible, les équations de Newton.

Chapitre d'équation 6 Section 6

6.1 - Dans la métrique de Schwarzschild

$$\boxed{ds^2 = \left(1+\frac{K}{r}\right)c^2dt^2 - \left[\frac{1}{1+\dfrac{K}{r}}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]} \tag{7-6.1}$$

La matrice du tenseur métrique est diagonale. Les composantes de ce tenseur sont indépendantes du temps. Elle peut être écrite :

$$\boxed{ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{ab}dx^adx^b} \tag{7-6.2}$$

Les indices $a,b \in (1,2,3)$ $x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^2 = \varphi$ et la variable $x^0 = ct$.

Sans que cela ne change pas la métrique de Schwarzschild, on peut remplacer les variables (r,θ,φ) par les variables (x,y,z) avec

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$. Dans ce cas $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^2 = z\ r =$

Le quadrivecteur vitesse a pour composantes $v^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds}$

Les composantes du vecteur de la vitesse d'une particule dans l'espace à 3 dimensions sont

$$v'^a = \frac{dx^a}{dt} = c\frac{dx^a}{dt} = c\frac{dx^a}{dx^0} = cv^a$$

Si les vitesses sont faibles devant la vitesse de la lumière

$$\frac{v'^a}{c} = \frac{dx^a}{dx^0} \ll 1$$

En remarquant que $\dfrac{dx^a}{dx^0} = \dfrac{dx^a}{ds}\dfrac{ds}{dx^0} = \left(\dfrac{dx^a}{ds}\right)\Big/\left(\dfrac{dx^0}{ds}\right) = \dfrac{v^a}{v^0}$ et donc

$$\boxed{\frac{v^a}{v^0} = \frac{v'^a}{c} \ll 1} \tag{7-6.3}$$

En divisant l'équation (7-6.2) par ds^2 :

$$\boxed{1 = g_{00}\left(v^0\right)^2 + g_{ab}v^av^b} \tag{7-6.4}$$

Le second terme du second membre est négligeable devant le premier terme. On peut également le voir en divisant les 2 membres par $\left(v^0\right)^2$

$$\frac{1}{\left(v^0\right)^2} = g_{00} + g_{ab}\frac{v^a}{v^0}\frac{v^b}{v^0}$$

Au second ordre près

$$\boxed{v^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}} \tag{7-6.5}$$

Géodésiques

Une particule suit une géodésique dont les équations sont

$$\frac{d_2x^a}{ds^2}+\Gamma^a_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}=0$$

Ou sous une autre forme

$$\frac{dv^a}{ds}=-\Gamma^a_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma$$

Dans le second membre il ya le terme $\Gamma^a_{00}\left(v^0\right)^2$ devant lequel tous les autres termes sont négligeables. On peut l'écrire

$-\left[\Gamma^a_{00}\left(v^0\right)^2+\Gamma^a_{0b}v^0v^b+\Gamma^a_{bc}v^av^b\right]=-\Gamma^a_{00}\left(v^0\right)^2\left(1+\frac{\Gamma^a_{0b}}{\Gamma^a_{00}}\frac{v^b}{v^0}+\frac{\Gamma^a_{bc}}{\Gamma^a_{00}}\frac{v^b}{v^0}\frac{v^c}{v^0}\right)$ et , avec une approximation du premier ordre :

$$\boxed{\frac{dv^a}{ds}=-\Gamma^a_{00}\left(v^0\right)^2} \qquad (7\text{-}6.6)$$

En écrivant $\frac{dv^a}{ds}=\frac{dv^a}{dx^0}\frac{dx^0}{ds}=\frac{dv^a}{dx^0}v^0$, l'équation (7-6.6) devient

$$\frac{dv^a}{dx^0}=-\Gamma^a_{00}v^0=-\Gamma^a_{00}\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \qquad (7\text{-}6.7)$$

$$\frac{dv^a}{dx^0}=-g^{am}\Gamma_{m00}\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}=-\frac{1}{2}g^{am}\left(g_{m0,0}-g_{00,m}+g_{0m,0}\right)\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$$

Les dérivées des composantes du tenseur métrique par rapport au temps étant nulles :

$\frac{dv^a}{dx^0}=g^{am}\left(\frac{1}{2}\frac{g_{00,m}}{\sqrt{g_{00}}}\right)$, le terme $\frac{1}{2}\frac{g_{00,m}}{\sqrt{g_{00}}}$ est la dérivée $\frac{\partial}{\partial x^m}\sqrt{g_{00}}=\left(\sqrt{g_{00}}\right)_{,m}$ et

$$\boxed{\frac{dv^a}{dx^0}=g^{am}\left(\sqrt{g_{00}}\right)_{,m}} \qquad (7\text{-}6.8)$$

En multipliant les 2 membres par g_{ab}, l'indice a du premier membre descend : les dérivées $g_{\mu\nu,0}$ sont nulles et $g_{ab}\frac{dv^a}{dx^0}=g_{ab}v^a{}_{,0}=\left(g_{ab}v^a\right)_{,0}-g_{ab,0}v^a=\left(g_{ab}v^a\right)_{,0}=v_{b,0}$. Au second membre $g_{ab}g^{am}\left(\sqrt{g_{00}}\right)_{,m}=\delta^m_b\left(\sqrt{g_{00}}\right)_{,m}=\left(\sqrt{g_{00}}\right)_{,b}$. Soit finalement,

$$\boxed{\frac{dv_b}{dx^0}=\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial x^b}} \qquad (7\text{-}6.9)$$

Avec $v_b=v'_b/c$ et $x^0=ct$, (7-6.9) s'écrit $\frac{dv'_b}{c^2dt}=\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{dx^b}\Rightarrow\frac{dv'_b}{dt}=c^2\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial x^b}$. Sous une forme condensée

$$\vec{\gamma}=c^2\overrightarrow{Grad}\sqrt{g_{00}} \qquad (7\text{-}6.10)$$

$g_{00}=1+\frac{K}{r}$, le terme $\left(K/r\right)\ll 1$, $\sqrt{g_{00}}=1+\frac{1}{2}\frac{K}{r}$ et $\overrightarrow{Grad}\sqrt{g_{00}}=-\frac{1}{2}\frac{K}{r^2}\vec{u}$, $\vec{u}$ étant le vecteur unitaire dans la direction (masse M attirante)→particule.

$$\boxed{\vec{\gamma}=-\frac{1}{2}c^2\frac{K}{r^2}\vec{u}} \qquad (7\text{-}6.11)$$

Dans la mécanique de Newton, l'accélération due à l'attraction universelle pour la même particule est

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{GM}{r^2}\vec{u}} \qquad (7\text{-}6.12)$$

Le rapprochement des formules (7-6.11) et (7-6.12) donne

$$\boxed{K = -\frac{2GM}{c^2}} \qquad (7\text{-}6.13)$$

6.2 – Métrique modifiée

En choisissant $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$, la métrique (7-6.1) $ds^2 = \left(1+\frac{K}{r}\right)c^2dt^2 - \left[\frac{1}{1+\frac{K}{r}}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$ est transformée. Sachant que $r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) = \left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] - dr^2$, la partie du second membre entre crochets $dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) = dx^2 + dy^2 + dz^2$. La métrique devient

$$ds^2 = \left(1+\frac{K}{r}\right)c^2dt^2 - \left[\left(\frac{1}{1+\frac{K}{r}} - 1\right)dr^2 + \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)\right] \qquad (7\text{-}6.14)$$

$$\boxed{ds^2 = \left(1+\frac{K}{r}\right)c^2dt^2 - \left[-\frac{1}{1+\frac{r}{K}}dr^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right]} \qquad (7\text{-}6.15)$$

Sachant que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$dr^2 = (dr)^2 = \frac{1}{r^2}(rdr)^2 = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{2}d\left(r^2\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\frac{\left[d\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right]^2}{r^2}$$

$$dr^2 = 2\frac{\left(xdx + ydy + zdz\right)^2}{r^2} \qquad (7\text{-}6.16)$$

$$dr^2 = \frac{2}{r^2}\left(x^2dx^2 + 2xydxdy + 2xzdxdz + y^2dy^2 + 2yzdydz + z^2dz^2\right)$$

En reportant dans (7-6.15)

$$\boxed{ds^2 = \left(1+\frac{K}{r}\right)c^2dt^2 - g_{ab}dx^a dx^b} \qquad (7\text{-}6.17)$$

Avec

$$\boxed{g_{ab}=\begin{cases}1-\dfrac{2}{1+\dfrac{r}{K}}\left(\dfrac{x^a}{r}\right)^2 & \text{si } a=b\\ -\dfrac{2}{1+\dfrac{r}{K}}\left(\dfrac{x^a}{r}\right)\left(\dfrac{x^b}{r}\right) & \text{si } a\neq b\end{cases}} \qquad (7\text{-}6.18)$$

Lorsque $r\to\infty$ les composantes du tenseur métrique $g_{ab}\to\delta_{ab}$, c'est-à-dire la métrique d'un espace plat.

7 – "Singularité" de Schwarzschild Chapitre d'équation (Suivant) Section 8

La singularité qui apparait lorsque $r=r_0$ n'est pas une véritable singularité. Elle est due au (mauvais) choix du système de coordonnées. Depuis la publication de Schwarzschild, divers autres systèmes de coordonnées, faisant disparaitre cette singularité, ont été proposés. Nous en verrons quelques uns.

Le calcul de la constante R_1 obtenue en faisant la produit contracté des 2 tenseurs R_{abcd} et R^{abcd} : $R_1=R_{abcd}R^{abcd}$. Cette constante étantv le produit contracté de 2 tenseurs ,est indépendante du système d'axes choisi.

8.1 – Calcul du tenseur de courbure

Le tenseur de la métrique de Schwarzschild est diagonal. Nous avons vu que dans le cas de la métrique de Schwarzschild seules les composantes de la formes R_{hiih} étaient différentes de zéro. Il y en a 6 : R_{0110}, R_{0220}, R_{0330}, R_{1221}, R_{1331} et R_{2332}. De chacune de ces 6 composantes 3 autres sont déduites. Elles lui sont égales ou opposées : $R_{abba}=-R_{baba}=-R_{abab}=R_{baab}$

La composante R^{abcd} est calculée par $R^{abcg}=g^{aa'}g^{bb'}g^{cc'}g^{dd'}R_{a'b'c'd'}$. Comme le tenseur g_{ab} est diagonal, il en est de même du tenseur g^{ab} et $g^{aa}=\dfrac{1}{g_{aa}}$ et

Comme R_{abcd} est de la forme R_{abba}, il reste

$$\boxed{R^{abba}=\frac{R_{abba}}{(g_{aa})^2(g_{bb})^2}} \qquad (8.1)$$

Pour le calcul des composantes R_{abba}, on utilisera la formule adaptée aux tenseurs métriques diagonaux :

$$\boxed{\begin{aligned}R_{hiih}&=g_{hh}\left[G_{h,ii}+\left(G_{h,i}\right)^2-G_{h,i}G_{i,i}\right]+g_{ii}\left[G_{i,hh}+\left(G_{i,h}\right)^2-G_{h,h}G_{i,h}\right]\\&+g_{hh}g_{ii}\sum_{\beta\neq i,h}\frac{G_{h,\beta}G_{i,\beta}}{g_{\beta\beta}}\end{aligned}} \qquad (8.1)$$

où $G_i=\ln\sqrt{|g_{ii}|}$.

Pour la métrique de Schwarzschild : $x^0=ct,\ x^1=r,\ x^2=\theta,\ x^3=\varphi$

$$\boxed{g_{00}=1-\frac{r_0}{r}=\frac{r-r_0}{r},\ g_{11}=-\frac{1}{g_{00}}=-\frac{r}{r-r_0},\ g_{22}=-r^2,\ g_{33}=-r^2\sin^2\theta} \qquad (7\text{-}8.3)$$

Et :

$$\boxed{G_0 = \tfrac{1}{2}\left[\ln\left(\left|r-r_0\right|\right)-\ln r\right], G_1 = \tfrac{1}{2}\left[\ln r - \ln\left(\left|r-r\right|_0\right)\right], G_2 = \ln r, G_3 = \ln r + \ln\left(\sin\theta\right)} \quad (7\text{-}8.4)$$

Les dérivées non nulles sont :

$$\boxed{G_{0,1} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r-r_0}-\frac{1}{r}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{r_0}{r\left(r-r_0\right)}, G_{1,1} = -G_{0,1}, G_{2,1} = \frac{1}{r}, G_{3,1} = \frac{1}{r} \text{ et } G_{3,2} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} \quad (7\text{-}8.5)$$

8.1.1 Calcul de R_{0110}

D'après (8.1) $R_{0110} = g_{00}\left[G_{0,11} + \left(G_{0,1}\right)^2 - G_{0,1}G_{1,1}\right] + g_{00}g_{11}\sum_{\beta\neq 0,1}\frac{G_{0,\beta}G_{1,\beta}}{g_{\beta\beta}}$

En effet tous les termes contenus dans le deuxième crochet de (8.1) contiennet des dérivées par rapport $x_0 = ct$ et sont donc nulles. Le terme $g_{00}g_{11}\sum_{\beta\neq 0,1}\frac{G_{0,\beta}G_{1,\beta}}{g_{\beta\beta}}$ est nul, la seule dérivée non nulle de G_0 étant $G_{0,1}$, mais $\beta \neq 1$.

$$R_{0110} = \frac{r-r_0}{r}\left[\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{1}{r-r_0}-\frac{1}{r}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\frac{r_0}{r\left(r-r_0\right)}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\frac{r_0}{r\left(r-r_0\right)}\right)^2\right]$$

Tous calculs effectués

$$\boxed{R_{0110} = -\frac{r_0}{r^3}} \quad (7\text{-}8.6)$$

8.1.2 Calcul de R_{0220}

Dans la formule (8.1) où $h = 0$ et $i = 2$, toutes les dérivées $G_{0,2} = 0$. De plus toutes les dérivées par rapport à $x^0 = ct$ sont également nulles; Il reste

$$R_{0220} = g_{00}g_{22}\sum_{\beta\neq 0,2}\frac{G_{0,\beta}G_{2,\beta}}{g_{\beta\beta}}$$

Seule la valeur $\beta = 1$ peut être retenue

$$R_{0220} = \frac{g_{00}g_{22}}{g_{11}}G_{0,1}G_{2,1} = \left(\frac{r-r_0}{r}\right)^2 r^2\,\tfrac{1}{2}\frac{r_0}{r\left(r-r_0\right)}\frac{1}{r}$$

$$\boxed{R_{0220} = \tfrac{1}{2}\frac{r_0\left(r-r_0\right)}{r^2}} \quad (7\text{-}8.7)$$

8.1.3 Calcul de R_{0330}

Toutes les dérivées par rapport à $x^0 = ct$ et $x^3 = \varphi$ sont nulles.

$$R_{0330} = g_{00}g_{33}\sum_{\beta\neq 0,3}\frac{G_{0,\beta}G_{3,\beta}}{g_{\beta\beta}}$$

Seule la valeur $\beta = 1$donne des dérivées non nulles

$$R_{0330} = \frac{g_{00}g_{33}}{g_{11}}G_{0,1}G_{3,1} = \left(\frac{r-r_0}{r}\right)^2 r^2\sin^2\theta\,\tfrac{1}{2}\frac{r_0}{r\left(r-r_0\right)}\frac{1}{r}$$

$$\boxed{R_{0330} = \tfrac{1}{2}\frac{r_0\left(r - r_0\right)}{r^2}\sin^2\theta} \qquad (7\text{-}8.8)$$

8.1.4 Calcul de R_{1221}

$$R_{1221} = g_{11}\left[G_{1,22} + \left(G_{1,2}\right)^2 - G_{1,2}G_{2,2}\right] + g_{22}\left[G_{2,11} + \left(G_{2,1}\right)^2 - G_{1,1}G_{2,1}\right] + g_{11}g_{22}\sum_{\beta\neq i,h}\frac{G_{1,\beta}G_{2,\beta}}{g_{\beta\beta}}$$

Tous les termes du premier crochet contenant des dérivées $G_{1,2}$ sont nuls. La seule dérivée non nulle de G_1 étant $G_{1,1}$, ce termeest donc nul.

$$R_{1221} = \left(-r^2\right)\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{r_0}{r\left(r - r_0\right)}\frac{1}{r}\right]$$

$$\boxed{R_{1221} = -\tfrac{1}{2}\frac{r_0}{r - r_0}} \qquad (7\text{-}8.9)$$

8.1.5 Calcul de R_{1331}

Toutes les dérivées par rapport à $x^3 = \varphi$ sont nulles. Tous les termes du premier crochet de (8.1) sont nuls.

$$R_{1331} = g_{33}\left[G_{3,11} + \left(G_{3,1}\right)^2 - G_{1,1}G_{3,1}\right] + g_{11}g_{33}\sum_{\beta\neq 1,3}\frac{G_{1,\beta}G_{2,\beta}}{g_{\beta\beta}}$$

La seule dérivée non nulle étant la dérivée par rapport à x^1, le terme $\sum_{\beta\neq 1,3}\frac{G_{1,\beta}G_{2,\beta}}{g_{\beta\beta}}$ est nul. $R_{1331} = \left(-r^2\sin^2\theta\right)\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{r_0}{r\left(r - r_0\right)}\frac{1}{r}\right]$

$$\boxed{R_{1331} = -\tfrac{1}{2}\frac{r_0}{r - r_0}\sin^2\theta} \qquad (7\text{-}8.10)$$

8.1.6 Calcul de R_{2332}

Les dérivées par rapport à $x^3 = \varphi$ étant nulles

$$R_{2332} = g_{33}\left[G_{3,22} + \left(G_{3,2}\right)^2 - G_{2,2}G_{3,2}\right] + g_{22}g_{33}\sum_{\beta\neq 2,3}\frac{G_{2,\beta}G_{3,\beta}}{g_{\beta\beta}}$$

$G_{2,2} = 0$ et seule la valeur de $\beta = 1$ peut être retenue.

$$R_{2332} = \left(-r^2\sin^2\theta\right)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right] + \left(-r^2\right)\left(-r^2\sin^2\theta\right)\left(-\frac{r - r_0}{r}\right)\frac{1}{r}\frac{1}{r}$$

$$\boxed{R_{2332} = rr_0\sin^2\theta} \qquad (7\text{-}8.11)$$

8.1. Calcul de R^{abba}

Le tenseur contracté $R_1 = R^{abba}R_{abba} = 4\frac{R_{abba}}{\left(g_{aa}g_{bb}\right)^2}R_{abba}$

$$\boxed{R_1 = 4\sum_{a,b} P_{ab} \quad \text{avec} \quad P_{ab} = \left(\frac{R_{abba}}{g_{aa}g_{bb}}\right)^2} \tag{7-8.12}$$

Des calculs simples montrent :

$$\boxed{P_{01} = \frac{r_0^{\ 2}}{r^6},\ P_{12} = P_{03} = P_{12} = P_{13} = \frac{1}{4}\frac{r_0^{\ 2}}{r^6},\ P_{23} = \frac{r_0^{\ 2}}{r^6}} \tag{7-8.13}$$

Ce qui donne

$$\boxed{R_1 = R^{abcd}R_{abcd} = 12\frac{r_0^{\ 2}}{r^6}} \tag{7-8.14}$$

La seule discontinuité de ce tenseur n'apparait que lorsque $r = 0$

Distances et intervalles de temps

1 - Intervalle de temps

En relativité générale, il y a 3 coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3 et une coordonnée liée au temps x^0. L'élément différentiel de la métrique est $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Il y a localement un temps réel τ

En un même point de l'espace, c'est à dire que $dx^1 = dx^2 = dx^3$, deux évènements infiniment rapprochés qui y sont survenus sont reliés par

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 = c^2 d\tau^2$$

d'où

$$\boxed{d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0} \qquad (7\text{-}5.1)$$

Le temps qui s'écoule entre 2 événements quelconques E_1 et E_2 en ce point de l'espace sont séparés par un temps

$$\boxed{\tau = \frac{1}{c}\int_{E_1}^{E_2}\sqrt{g_{00}}dx^0} \qquad (7\text{-}5.2)$$

Cette relation détermine les vrais intervalles de temps en un point de l'espace. Ce temps est également appelé ***temps propre*** du point considéré.

On peut remarquer que la relation (7-5.2) impose

$$\boxed{g_{00} > 0} \qquad (7\text{-}5.3)$$

2 – Intervalle de distance spatiale

En relativité restreinte, dans un même référentiel toutes es horloges peuvent être synchronisées. On peut définir dl comme l'intervalle entre 2 évènements infiniment voisins se produisant au même instant. Il suffit de faire $dx^0 = 0$.

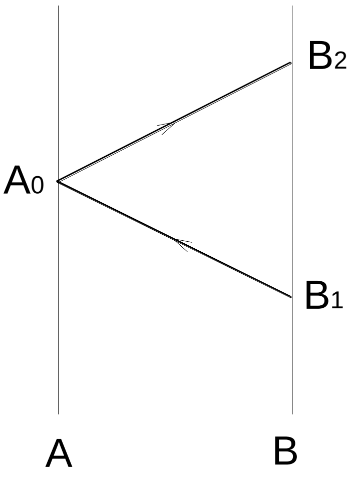


Figure 1

En relativité générale le temps propre est lié à la coordonnées x^0 de façon différente.

2 – 1 Elément *dl*

Eléments :

Un point A de l'espace de coordonnées x^α

Un point B infiniment voisin de coordonnées $x^\alpha + dx^\alpha$, avec $\alpha = 1,2,3$

Un signal lumineux émis de B en $x^0 + dx^{0(1)}$, événement B_1 arrive en A en x^0, événement A_0, $dx^{0(1)} < 0$

il est renvoyé aussitôt de A vers B

Il arrive en B en $x^0 + dx^{0(2)}$, $dx^{0(2)} > 0$, événement B_2

Au point B le temps que met le signal lumineux entre son départ et son retour est égal à 2 fois la distance spatiale entre A et B divisée par la vitesse c de la lumière.

La distance entre les évènements A_0 et B_1 et entre les évènements A_0 et B_2 est : $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. En séparant les coordonnées spatiales et temporelles :

$$\boxed{ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta} \tag{7-5.4}$$

Les lettres grecques sont utilisées pour les valeurs 1,2 et 3.

Le trajet étant le trajet d'un rayon de lumière $ds = 0$. En résolvant $ds^2 = 0$ par rapport à dx^0 :

$$dx^0 = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha \pm \sqrt{\left(g_{0\alpha}dx^\alpha\right)^2 - g_{00}g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}\right).$$

Si on remarque que $g_{0\alpha}dx^\alpha = g_{0\beta}dx^\beta$ et donc $g_{0\alpha}dx^\alpha - g_{0\beta}dx^\beta = 0$. En élevant au carré cette dernière expression :

$\left(g_{0\alpha}dx^\alpha\right)^2 + \left(g_{0\beta}dx^\beta\right)^2 - 2g_{0\alpha}g_{0\beta}dx^\alpha dx^\beta = 2\left[\left(g_{0\alpha}dx^\alpha\right)^2 - g_{0\alpha}g_{0\beta}dx^\alpha dx^\beta\right] = 0$. soit donc $\left(g_{0\alpha}dx^\alpha\right)^2 = g_{0\alpha}g_{0\beta}dx^\alpha dx^\beta$. ce qui permet d'écrire

$$dx^0 = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha \pm \sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta}\right)$$

et

$$\boxed{\begin{aligned} dx^{0(1)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta}\right) \\ dx^{0(2)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha + \sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta}\right) \end{aligned}} \tag{7-5.5}$$

Au point B la "distance" entre les évènements B_1 et B_2

$$dx^0 = dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta}$$

est relié au temps propre du point B. D'après la relation (7-5.1) il faut multiplier dx^0 par $\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}$:

$$d\tau = \frac{1}{c}\frac{2}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta}$$

La distance $dl = \frac{c}{2}d\tau = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta}$ ou sous une autre forme

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta$$

ou encore

$$\boxed{dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta} \tag{7-5.6}$$

avec

$$\boxed{\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}} \qquad (7\text{-}5.7)$$

2 – 2 Cas général

Il n'est pas en, général, possible de calculer une distance entre de points M_1 et M_2 en calculant l'intégrale $\int_{M_1}^{M_2} \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du}} du$, le long d'une courbe $x^\alpha\left(u\right)$ allant de M_1 à M_2. En effet les quantités g_{ij} dépendent de la variable x^0 et la métrique spatiale varie au cours du temps. La distance ainsi calculée dépendrait du chemin choisi.

2 – 3 Cas où une distance peut être calculée

Si les g_{ij} sont indépendant de x^0 et l'intégrale $\int_{M_1}^{M_2} \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du}} du$ le long d'une courbe spatiale a une signification bien définie.

C'est le cas pour la métrique de Schwarzschild.

3 – Tenseur de la métrique spatiale

On peut montrer que le tenseur $-\gamma_{\alpha\beta},\, \alpha, \beta = 1,2,3$ est l'inverse du tenseur tridimensionnel contravariant $g^{\alpha\beta}$.

L' égalité $g^{\text{ik}} g_{kl} = \delta_l^{\text{i}}$, en isolant l'indice 0 peut s'écrire :

$$\boxed{\begin{array}{l} g^{\alpha\text{i}} g_{\text{i}\gamma} = g^{\alpha 0} g_{0\gamma} + g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \\ g^{\alpha\text{i}} g_{\text{i}0} = g^{\alpha 0} g_{00} + g^{\alpha\beta} g_{\beta 0} = \delta_0^{\text{i}} = 0 \\ g^{0\text{i}} g_{\text{i}0} = g^{00} g_{00} + g^{0\beta} g_{\beta 0} = \delta_0^0 = 1 \end{array}} \qquad (7\text{-}5.8)$$

En tirant $g^{\alpha 0}$ de la seconde équation $g^{\alpha 0} = -g^{\alpha\beta} \frac{g_{\beta 0}}{g_{00}}$ et en reportant dans la première :

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta} \frac{g_{\beta 0} g_{0\gamma}}{g_{00}} = -g^{\alpha\beta} \left(-g_{\beta\gamma} + \frac{g_{\beta 0} g_{\gamma 0}}{g_{00}} \right) = \delta_\gamma^\alpha \qquad (g_{\gamma 0} = g_{0\gamma})$$

D'après l'équation (7-5.7) $\left(-g_{\beta\gamma} + \frac{g_{\beta 0} g_{\gamma 0}}{g_{00}} \right) = \gamma_{\beta\gamma}$ soit donc $\left[-g^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \right]$ ce qui montre que le tenseur $-\gamma_{\alpha\beta}$ est l'inverse du tenseur tridimensionnel $g^{\alpha\beta}$ et par suite

$$\boxed{\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}} \qquad (7\text{-}5.9)$$

En écrivant le déterminant $\left[\!\left[g^{\text{ij}} \right]\!\right]$ sous la forme

	g^{00}	g^{01}	g^{02}	g^{03}

	g^{10}		
	g^{20} $g^{\alpha\beta}=-\gamma^{\alpha\beta}$		
	g^{30}		

Le terme g_{00} est obtenu par $g_{00}=\dfrac{cofacteur \text{ de } g^{00}}{\text{Déterminant de } g^{\mathrm{ij}}}$ soit $g_{00}=\dfrac{\left[\!\left[g^{\alpha\beta} \right]\!\right]}{\left[\!\left[g^{\mathrm{ij}} \right]\!\right]}=\dfrac{-\left[\!\left[\gamma^{\alpha\beta} \right]\!\right]}{\left[\!\left[g^{\mathrm{ij}} \right]\!\right]}$

(La notation A signifie "valeur du déterminant *A*). Sachant que

$\left[\!\left[g^{\mathrm{ij}} \right]\!\right]=\dfrac{1}{\left[\!\left[g_{\mathrm{ij}} \right]\!\right]}=\dfrac{1}{g}$ et que $\left[\!\left[\gamma^{\beta\gamma} \right]\!\right]=\dfrac{1}{\left[\!\left[\gamma_{\alpha\beta} \right]\!\right]}=\dfrac{1}{\gamma}$ il reste $g_{00}=-\dfrac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{g}}=-\dfrac{g}{\gamma}$

$$\boxed{-g=g_{00}\gamma} \qquad (7\text{-}5.10)$$

3 – Vecteur g

Le vecteur g est défini par ses composantes covariantes :

$$\boxed{g_{\alpha}=-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}} \qquad (7\text{-}5.11)$$

Dans l'espace métrique défini par (7-5.6) : $dl^2=\gamma_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$, les composantes contravariantes de g sont $g^{\alpha}=\gamma^{\alpha\beta}g_{\beta}=\gamma^{\alpha\beta}\left(-\dfrac{g_{0\beta}}{g_{00}}\right)$. D'après la deuxième équation de (7-5.8) $\dfrac{g_{\beta 0}}{g_{00}}=\dfrac{g_{0\beta}}{g_{00}}=-\dfrac{g^{\alpha 0}}{g^{\alpha\beta}}$ et donc $g^{\alpha}=\left(-\dfrac{\gamma^{\alpha\beta}}{g^{\alpha\beta}}\right)\left(-g^{\alpha 0}\right)$, comme d'après (7-5.9) $\gamma^{\alpha\beta}=-g^{\alpha\beta}$ et que $g^{\alpha 0}=g^{0\alpha}$

$$\boxed{g^{\alpha}=\gamma^{\alpha\beta}g_{\beta}=-g^{0\alpha}} \qquad (7\text{-}5.12)$$

de la troisième équation de (7-5.8) $g^{00}=-\dfrac{1}{g_{00}}+\left(-\dfrac{g_{\beta 0}}{g_{00}}\right)g^{0\beta}$, d'après (7-5.11) et (7-5.12) en remplaçant l'indice muet β par α :

$$\boxed{g^{00}=\frac{1}{g_{00}}-g_{\alpha}g^{\alpha}} \qquad (7\text{-}5.13)$$

4 – Notion de simultanéité

Dans un espace euclidien, un signal émis d'un point B à l'instant t_1 atteint un point A à l'instant t_0. Réfléchi en A ce signal revient en B à t_2. Au point B il est possible de dire que $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

En reprenant les signaux lumineux de la figure 1, dans un espace infiniment petit, en B il est possible de dire que l'instant x^0, mesuré en A, correspondant à l'instant où le signal a atteint le point A. Cet instant correspond en B à l'instant où

$$x^{0(A)} = x^0 + \Delta x^0 = \frac{1}{2}\left[\left(x^0 + dx^{0(1)}\right) + \left(x^0 + dx^{0(2)}\right)\right] = x^0 + \frac{1}{2}\left(dx^{0(1)} + dx^{0(2)}\right)$$

$$\boxed{\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = g_\alpha dx^\alpha} \qquad \text{(7-5.14)}$$

5 - Synchronisation

La formule (7-5.14) permet de synchroniser les horloges le long d'une ligne ouverte :

$$\boxed{x^{0(M)} - x^{0(A)} = \int_A^M g_\alpha dx^\alpha} \qquad \text{(7-5.15)}$$

Il est en général impossible de synchroniser les horloges le long d'un contour fermé : $\oint_{De\ M\ \grave{a} M} g_\alpha dx^\alpha \neq 0$. A fortiori il est impossible de synchroniser les horloges dans tout l'espace.

Pour synchroniser les horloges dans tout l'espace il faut que $g_{0\alpha} = 0$.

Remarque

L'impossibilité de synchroniser tout l'espace n'est pas du à l'espace lui même mais au choix du système de coordonnées choisi. L. LANDAU montre au chapitre 97 qu'il est possible de trouver un nombre infini de systèmes de coordonnées tels que $g_{00} = 1,\ g_{0\alpha} = 0$. Dans un tel système de coordonnées ce n'est pas seulement les x^0 qui peuvent être synchronisés, mais c'est le temps t qui est le même en tout point de l'espace, il faudrait peut-être dire les Δt. Cela mériterait d'être approfondi.

6 – Exemple d'application : métrique de SCHWARZSCHILD

La métrique de Schwarzschild est, en notant le rayon de Schwarzschild $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$:

$$g_{00} = c^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right), g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}},\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2 \sin^2\theta$$

$$g_{0\alpha} = 0,\ g_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta$$

Dans ce cas $g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} = 0$

L'application de la formule (7-5.15) donne : $x^{0(M)} - x^{0(A)} = \int_A^M g_\alpha dx^\alpha = 0$. Ce qui signifie que la valeur de x^0 est la même dans tout l'espace. Cela ne signifie évidemment pas que le temps est le même en tous les points. Cependant, il est possible de dire que si, par exemple, pour $x^0 = 0$ on dit que $t = 0$ dans tout l'espace, alors pour un x^0 donné, une personne située en A, de coordonnées spatiales $x^{1(A)} = r_A, x^{2(A)} = \theta_A$ et $x^{3(A)} = \varphi_A$, le temps qui se sera écoulé est d'après (7-5.2)

$$\tau_A = \int_0^{x^0} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r_A}} dx^0 = \left(\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_A}} \right) x^0$$

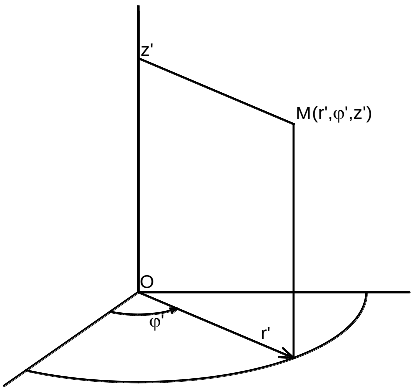
Cette personne pourra dire qu'au point M de coordonnées $x^{1(M)} = r_M, x^{2(M)} = \theta_M$ et $x^{3(M)} = \varphi_M$ le temps est $\tau_M = \left(\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_M}} \right) x^0$ ou encore

$$\boxed{\tau_M = \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{r_M}}{1 - \frac{r_0}{r_A}}} \right) \tau_A}$$

On peut remarquer que si r_A est très grand et r_M proche de r_0 le temps τ_M sera petit devant le temps τ_A .jusqu'à tendre vers 0 si $r_M \to r_0$ Inversement pour un observateur placé en M, le temps τ_A sera très grand par rapport à son temps propre τ_M .

7 - Autre application : cylindre en rotation

7.1 Tenseur fondamental



Dans le référentiel fixe de coordonnées r', φ', z', t' l'élément de longueur

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2$$

Dans les axes du référentiel tournant

$$t = t', r = r', z = z', \varphi = \varphi' - \omega t' \quad \text{ou} \quad \varphi' = \varphi + \Omega$$

Et l'élément de longueur dans ce référentiel :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 \left(d\varphi^2 + \omega dt^2 \right) - dz^2$$

Soit

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right) c^2 dt^2 - 2 \frac{r^2 \omega}{c} cdtd\varphi - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2} \qquad (7\text{-}7.1)$$

En posant $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = z$

$$\boxed{g_{00} = 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2},\ g_{02} = -\frac{r^2 \omega}{c},\ g_{11} = -1,\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -1} \qquad (7\text{-}7.2)$$

Ce qui donne pour le tenseur de la métrique spatiale

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}, \ (\alpha, \beta) \in (1,2,3):$$

Le seul produit $g_{0\alpha} g_{0\beta} \neq 0$ est le produit $g_{02} g_{02}$.

$$\boxed{\gamma_{11} = -g_{11},\ \gamma_{12} = 0,\ \gamma_{13} = 0,\ \gamma_{22} = r^2 + \frac{r^4}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}},\ \gamma_{23} = 0,\ \gamma_{33} = 1} \qquad (7\text{-}7.3)$$

L'élément de longueur :

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} d\varphi^2 + dz^2} \qquad (7\text{-}7.4)$$

Et le temps propre $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 - \omega^2 r^2}$:

$$\boxed{d\tau = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} dt} \qquad (7\text{-}7.5)$$

On retrouve la contraction du temps de la relativité restreinte.

Si un point M a pour coordonnées $r = R,\ \varphi = 0,\ z = 0$, la longueur du segment de droite joignant l'origine $(r = 0,\ \varphi = 0,\ z = 0)$ est $\int_0^R dr = R$, la longueur de la circonférence du cercle centré à l'origine, situé dans le plan $z = 0$ et passant par M est $L = \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} d\varphi = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}$ soit

$$\boxed{\frac{L}{R} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi} \qquad (7\text{-}7.6)$$

On retrouve sur une circonférence de rayon R la contraction des longueurs de la relativité restreinte.

7.2 Vitesses apparentes de la lumière

7.2.1 Vitesse tangentielle de la lumière

La trajectoire d'un rayon lumineux est telle que $ds^2 = 0$. Si on ne considère que des rayons lumineux se propageant sur un cercle de rayon R donné dans le plan $z = 0$: $dr = dz = 0$

$$\left(1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - 2\frac{r^2 \omega}{c} cdtd\varphi - R^2 d\varphi^2 = 0 \qquad (7\text{-}7.7)$$

La vitesse de la lumière $\frac{V(R)}{c} = \frac{Rd\varphi}{cdt}$, l'équation (7-7.7) s'écrit :

$$\left(\frac{Rd\varphi}{cdt}\right)^2 + 2\frac{\omega R}{c}\left(\frac{Rd\varphi}{cdt}\right) - \left[1 - \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2\right] = 0$$

En posant $\sin\alpha = \beta = \frac{\omega R}{c}$, l'équation précédente devient

$$\left(\frac{V(R)}{c}\right)^2 + 2\sin\alpha\frac{V(R)}{c} - \cos^2\alpha = 0 \quad (7\text{-}7.8)$$

soit $\left(\frac{V(R)}{c} + \sin\alpha\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{V(R)}{c} = \pm 1 - \sin\alpha$

Le signe + correspond à la lumière se propageant dans le sens de rotation. En valeurs absolues les 2 vitesses de la lumière sont $V_+ = c\left(1 - \frac{\omega R}{c}\right)$ et $V_- = c\left(1 + \frac{\omega R}{c}\right)$. En appelant $V_e = \omega R$ « la vitesse d'entrainement »

$$\boxed{\begin{aligned} V_+ &= c - V_e \\ V_- &= c + V_e \end{aligned}} \quad (7\text{-}7.9)$$

La vitesse V_+ est supérieure à le vitesse de la lumière dans le vide dans un référentiel « fixe ».

La composition des vitesses est identique à celle qui serait obtenue dans la relativité galiléenne !

La différence de temps de parcours des 2 rayons lumineux est $\Delta t = 2\pi R\left(\frac{1}{V_+} - \frac{1}{V_-}\right)$

$$\boxed{\Delta t = \frac{2\pi R}{c}\frac{\frac{2\omega R}{c}}{1 - \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2}} \quad (7\text{-}7.10)$$

Une expérience a été réalisée par SAGNAC en 1913. Il a constaté à l'aide d'un dispositif interférométrique que le déphasage entre les 2 faisceaux correspondait à la formule (7-7.10) .

7.2.2 Vitesse radiale de la lumière

Dans ce cas $d\varphi = 0$ et $dz = 0$ et

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)c^2 dt^2 - dr^2 = 0$$

La vitesse de la lumière est alors $V_r = \frac{dr}{dt}$

$$\boxed{V_r = c\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \quad (7\text{-}7.11)$$

La vitesse radiale de la lumière varie de c à 0 lorsque le rayon croit de 0 à $\frac{c}{\omega}$

7.2. Explication du paradoxe

Voir au chapitre 8 une explication de ce paradoxe d'une vitesse de la lumière qui serait variable.

7.3 Coefficients de Christoffel dans l'espace à 4 dimensions

De première espèce

Le tenseur fondamental et son inverse sous forme de matrices :

$$\left[g_{\mu\nu}\right]\begin{bmatrix}1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2} & 0 & -\frac{r^2\omega}{c} & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -\frac{r^2\omega}{c} & 0 & -r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \text{ et } \left[g^{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{\omega}{c} & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -\frac{\omega}{c} & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$\Gamma_{\mu\nu\rho}=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\rho}-g_{\nu\rho,\mu}+g_{\rho\mu,\nu}\right)$, les seules dérivées non nulles sont $g_{00,1}$, $g_{02,1}$ et $g_{22,1}$.

Les symboles de Christoffel de première espèce non nuls ne peuvent se trouver que parmi :

$$\Gamma_{001}=\Gamma_{010},\ \Gamma_{100,}$$
$$\Gamma_{021}=\Gamma_{012},\Gamma_{102}=\Gamma_{120},\ \Gamma_{201}=\Gamma_{210}$$
$$\Gamma_{122},\Gamma_{212}=\Gamma_{221}$$

Les calculs donnent :

$$\boxed{\begin{array}{l}\Gamma_{001}=\Gamma_{010}=-\frac{\omega^2 r}{c^2},\ \Gamma_{100}=\frac{\omega^2 r}{c^2}\\ \Gamma_{012}=\Gamma_{021}=-\frac{\omega r}{c},\ \Gamma_{102}=\Gamma_{120}=\frac{\omega r}{c},\ \Gamma_{201}=\Gamma_{210}=-\frac{\omega r}{c}\\ \Gamma_{122}=r,\ \Gamma_{212}=\Gamma_{221}=-r\end{array}} \qquad (7\text{-}7.12)$$

De seconde espèce

$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}=g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\nu\rho}$

Les seuls symboles non nuls sont Γ^1_{00}, $\Gamma^2_{01}=\Gamma^2_{01}$, $\Gamma^1_{02}=\Gamma^1_{20}$, $\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}$, Γ^1_{22}. Par exemple $\Gamma^1_{00}=g^{\alpha 1}\Gamma_{\alpha 00}=g^{11}\Gamma_{100}=-\Gamma_{100}=-\frac{\omega^2 r}{c^2}$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Gamma^0_{ab}=0\\ \Gamma^1_{00}=-\frac{\omega^2 r}{c^2},\ \Gamma^1_{02}=\Gamma^1_{20}=-\frac{\omega r}{c},\ \Gamma^1_{22}=-r\\ \Gamma^2_{01}=\Gamma^2_{10}=\frac{\omega}{rc},\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{r}\\ \Gamma^3_{ab}=0\end{array}} \qquad (7\text{-}7.13)$$

On peut vérifier que la courbure $R=0$

7.4 Espace à 3 dimensions

En partant de (7-7.3) :

$$\left[\gamma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{r^2}{1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ et } \left[\gamma^{ij}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}7.14)$$

Symboles de Christoffel

La seule dérivée non nulle est $\gamma_{22,1}=\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{r^2}{1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}}\right)=\dfrac{2r}{\left(1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2}$

Les seules symboles de première espèce non nuls ne peuvent être que Γ_{122} , $\Gamma_{212}=\Gamma_{221}$

$$\boxed{\Gamma_{122}=-\tfrac{1}{2}\gamma_{22,1}=-\frac{r}{\left(1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2} \qquad \Gamma_{212}=\Gamma_{221}=\tfrac{1}{2}\gamma_{22,1}=\frac{r}{\left(1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2}} \qquad (7\text{-}7.15)$$

Et les symboles de seconde espèce :

$$\boxed{\Gamma^1_{22}=-\frac{r}{\left(1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2} \qquad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{r}{\left(1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2}} \qquad (7\text{-}7.16)$$

7.5 Géodésiques dans l'espace à 4 dimensions

Plutôt que d'utiliser $\dfrac{d_2x^i}{d\lambda^2}+\Gamma^i_{jk}\dfrac{dx^j}{d\lambda}\dfrac{dx^k}{d\lambda}=0$, on utilisera la recherche de l'extremum de l'intégrale d'action du lagrangien

$$L=\frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)c^2\dot{t}^2-2\frac{r^2\omega}{c}c\dot{t}\dot{\varphi}-\dot{r}^2-r^2\dot{\varphi}^2-\dot{z}^2\right]$$

On peut remarquer que le lagrangien ne dépend pas explicitement des variables t,φ et z, par conséquent pour ces 3 variables $\dfrac{\partial L}{\partial x^i}=0$.

L'écriture du lagrangien sera simplifiée en posant $\tau=ct$:

$$\boxed{L=\frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)\dot{\tau}^2-2\frac{r^2\omega}{c}\dot{\tau}\dot{\varphi}-\dot{r}^2-r^2\dot{\varphi}^2-\dot{z}^2\right]} \qquad (7\text{-}7.17)$$

Variable z

$\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{z}}=-\dot{z}=0 \;\Rightarrow\; z=\alpha\lambda$, α étant une constante. Pour simplifier on prendra $\alpha=0$, c'est-à-dire que seules les géodésiques et rayons lumineux situés dans le plan $z=0$ seront étudiés.

Variable φ

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{r^2\omega}{c}\dot{\tau}-r^2\dot{\varphi}\right)=0$$

$$\boxed{\frac{r^2\omega}{c}\dot{\tau}+r^2\dot{\varphi}=A} \qquad \text{(7-7.18)}$$

Variable τ

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial\dot{\tau}}=\frac{d}{d\lambda}\left[\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)\dot{\tau}-\frac{\omega r^2}{c}\dot{\varphi}\right]=0$$

$$\boxed{\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)\dot{\tau}-\frac{\omega r^2}{c}\dot{\varphi}=B} \qquad \text{(7-7.19)}$$

Les équations (7-7.18) et (7-7.19) peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\frac{\omega r^2}{c} & r^2\\ \left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right) & -\frac{\omega r^2}{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\tau}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$$

La solution en est, sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix}\dot{\tau}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}=[M]\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix} \text{ avec } [M]=\frac{1}{r^2}\begin{bmatrix}\frac{\omega r^2}{c} & r^2\\ \left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right) & -\frac{\omega r^2}{c}\end{bmatrix}$$

Variable r

Nous ne ferons les calculs que pour la trajectoire des rayons lumineux. Dans ce cas $g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j=0$, le laplacien donné par (7-7.17) est nul. On en extrait $\dot{r}$:

$$\dot{r}^2=\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)\dot{\tau}^2-2\frac{r^2\omega}{c}\dot{\tau}\dot{\varphi}-r^2\dot{\varphi}^2$$ ou sous forme matricielle

$$\dot{r}^2=\begin{bmatrix}\dot{\tau}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}^t[N]\begin{bmatrix}\dot{\tau}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} \text{ avec } [N]=\begin{bmatrix}\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right) & -\frac{\omega r^2}{c}\\ -\frac{\omega r^2}{c} & -r^2\end{bmatrix}$$

, en remplaçant $\begin{bmatrix}\dot{\tau}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}$ par leur expression :

$$\dot{r}^2=\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}^t[M]^t[N][M]\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$$

La matrice $[N]$ étant symétrique la matrice $[M]^t[N][M]$ est également symétrique. Tous calculs faits :

$$[M]^t[N][M] = \frac{1}{r^2}\left[\begin{array}{c:c} -\left(1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) & \dfrac{\omega r^2}{c} \\ \hdashline \dfrac{\omega r^2}{c} & r^2 \end{array}\right] \text{ et}$$

$$\boxed{\dot{r}^2 = \frac{1}{r^2}\left[-\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)A^2 + 2\frac{\omega r^2}{c}AB + r^2 B^2\right]} \qquad (7\text{-}7.20)$$

Trajectoire

Avec

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}\left[\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)A - \frac{\omega r^2}{c}B\right]} \qquad (7\text{-}7.21)$$

Les équations (7-7.20) et (7-7.21) permettent d'établir une relation entre les variables d'espace $r \; et \varphi$:

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r}\frac{\left(1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)A - \dfrac{\omega r^2}{c}B}{\sqrt{-\left(1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)A^2 + 2\dfrac{\omega r^2}{c}AB + r^2 B^2}} \qquad (7\text{-}7.22)$$

En posant $K = \dfrac{B}{A}$ l'équation à intégrer est

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r}\frac{\left(1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) - \dfrac{\omega r^2}{c}K}{\sqrt{-\left(1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) + 2\dfrac{\omega r^2}{c}K + r^2 K^2}}} \qquad (7\text{-}7.23)$$

Comme sous le signe $\sqrt{\ }$ la variable d'intégration r n'intervient qu'au carré, cette intégrale peut s'intégrer avec des fonctions élémentaires.

Sans que cela ne réduise la généralité de la solution, on pourra prendre comme codition initiale $r = r_{0,}\ \varphi_0 = 0$ et $\dot{r} = 0$. L'équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** permet de déterminer la constante K :

$$r_0^2 K^2 + 2\frac{\omega r_0^2}{c}K - \left(1-\frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}\right) = 0 \Rightarrow r_0^2\left(K + \frac{\omega}{c}\right)^2 = 1$$

Soit $K + \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{1}{r_0}$ et $K = \dfrac{1}{r_0}\left(1-\dfrac{\omega r_0}{c}\right)$.

On vérifie bien que le point départ doit être sur un rayon r_0 tel que $\omega r_0 < c$.

Solution

En reportant la valeur de K dans le terme sous la racine carrée :

$$D = -\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) + 2\frac{\omega r^2}{c}K + r^2 K^2 = r^2\left(K + \frac{\omega}{c}\right)^2 - 1$$

Ou encore $D = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1$

De même le numérateur de (7-7.23) :

$$N = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) - \frac{\omega r^2}{c} K = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) - \frac{\omega r^2}{c}\frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{\omega r_0}{c}\right)$$

$N = 1 - \frac{1}{r_0}\frac{\omega r^2}{c} = 1 - \frac{\omega r_0}{c}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2$, ce qui donne pour le calcul de φ :

$$d\varphi = \frac{1 - \frac{\omega r_0}{c}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}}\frac{dr}{r} \qquad (7\text{-}7.24)$$

Le rayon maximum r_M du disque est tel que $\omega r_M = c \;\Rightarrow\; \frac{\omega}{c} = \frac{1}{r_M}$. En posant maintenant $\rho = \frac{r}{r_M}$, l'équation (7-7.24) devient

$$d\varphi = \frac{1 - \rho_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 1}}\frac{d\rho}{\rho} \qquad (7\text{-}7.25)$$

Le second membre ne comporte plus que des variables sans dimension. Cette équation s'intègre très facilement en posant $\rho = \rho_0 \operatorname{ch}\theta$:

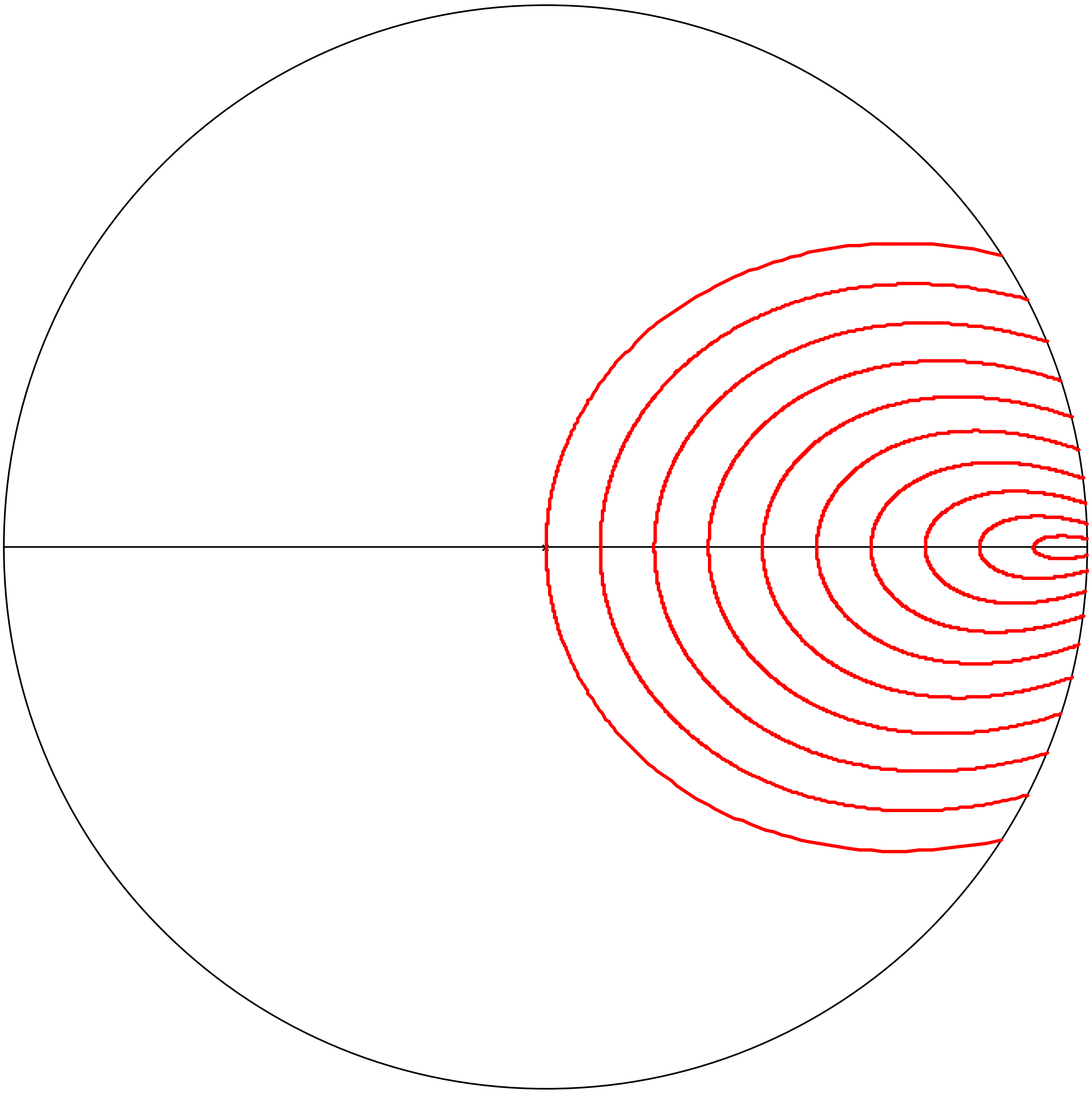
$$d\varphi = \frac{1 - \rho_0 \operatorname{ch}^2\theta}{\operatorname{sh}\theta}\frac{\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{ch}\theta}d\theta = \frac{d\theta}{\operatorname{ch}\theta} - \rho_0 \operatorname{ch}\theta d\theta$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\left(e^{\theta}\right) - \rho_0 \operatorname{sh}\theta} \qquad (7\text{-}7.26)$$

<u>Cas particulier $r_0 = 0$</u>

L'équation (7-7.25) devient lorsque $\rho_0 \to 0$ $d\varphi = -d\rho$. La courbe est une spirale d'Archimède.

Tracés des rayons lumineux coupant l'axe "horizontal' à angle droit.



"Cône" de lumière sur le rayon extérieur

Le rayon extérieur correspond à $\rho = 1$. Pour cette valeur de ρ

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\rho_0{}^2} - 1}}{1 - \frac{1}{\rho_0}} = \frac{\sqrt{1-\rho_0{}^2}}{\rho_0 - 1} = -\sqrt{\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}}$$

. C'est la valeur de la tangent de l'angle α que fait le rayon lumineux avec le rayon vecteur. En fait ceci est valable pour une extrémité du rayon lumineux, à l'autre extrémité l'angle est changé de signe .Si on pose $\rho_0 = \cos\beta$

$$|\mathrm{tg}\,\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}} = \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$$

, comme $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$, pour l'angle α :

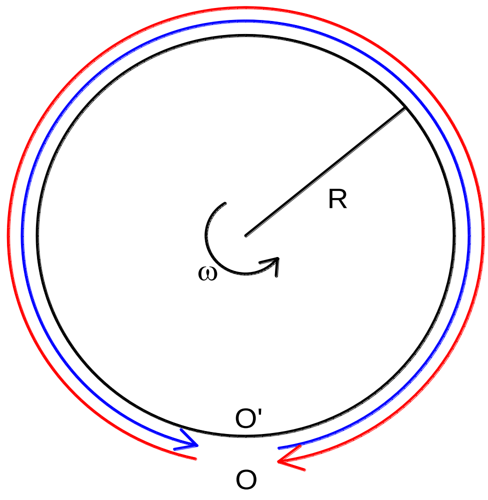
$$\boxed{-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le +\frac{\pi}{2}} \qquad (7\text{-}7.27)$$

8 – Effet Sagnac

Section d'équation (suivante)

8.1 - Problème

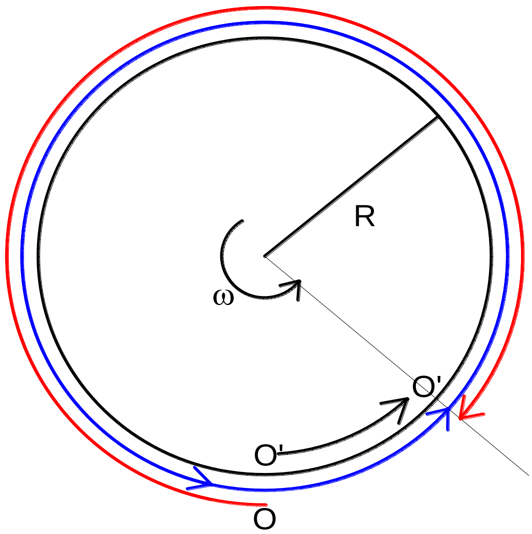
Le disque est en rotation avec une vitesse angulaire ω. D'un point O' situé près de la circonférence sont émis simultanément 2 rayons lumineux en sens opposés. Ces 2 rayons sont astreints, par une série de miroirs par exemple, à suivre 2 trajectoires se rapprochant d'une trajectoire circulaire.



Lorsqu'un rayon a réalisé un "tour complet" il repasse en O'.
Que se passe-t-il pour un observateur situé en O' sur le disque tournant ?

Dans le repère tournant cet observateur est immobile. Les 2 rayons lumineux doivent parcourir la même distance. Ils devraient donc revenir au point O' au même instant.
En fait ce n'est pas le cas.

8.2 – Une explication



Pour un observateur situé dans le repère fixe, la vitesse de la lumière est constante. Lorsque les rayons lumineux décrivent leurs circonférences le disque continue de tourner. Le point O' se déplace.

La vitesse angulaire de la lumière est $\omega_c = \dfrac{c}{R}$, si R est le rayon du disque mesuré dans le repère fixe. Ce premier rayon met un temps t_1 pour revenir au point O' :

$$\boxed{(\omega_c + \omega)t_1 = 2\pi \ \rightarrow \ t_1 = \frac{2\pi}{\omega_c + \omega}} \qquad (7\text{-}8.1)$$

L'autre rayon lumineux revient au point O' au bout du temps t_2 :

$$\boxed{(\omega_c - \omega)t_2 = 2\pi \ \rightarrow \ t_2 = \frac{2\pi}{\omega_c - \omega}} \qquad (7\text{-}8.2)$$

Il y a un décalage $\delta t = t_2 - t_1 = 2\pi\left(\dfrac{1}{\omega_c - \omega} - \dfrac{1}{\omega_c + \omega}\right)$.

$$\boxed{\delta t = \frac{4\pi\omega}{\omega_c^2 - \omega^2}} \tag{7-8.3}$$

Sachant que $\omega_c = c/R$ cet écart peut également s'écrire :

$$\boxed{\delta t = \frac{4\pi\omega}{\frac{c^2}{R^2} - \omega^2}} \tag{7-8.4}$$

Pour l'observateur situé en O', le temps s'écoule moins vite puisque par rapport à un observateur fixe il se déplace à chaque instant à une vitesse $v = \omega R$.

Le premier rayon lumineux atteint le point O' au temps t_1 soit au temps t_1' pour l'observateur situé en O'. Le point O' est en face du point M_1 dans l'espace de l'observateur fixe.Pour le deuxième rayon lumineux ce sont les valeurs t_2, t_2' et M_2.

Si on suppose que la distance M_1M_2 est suffisamment petite pour être assimilée à un segment de droite, les équations de Lorentz de la relativité s'appliquent.

En appelant $\beta = v/c$ et $\Gamma = \sqrt{1-\beta^2}$:

$$t_2' - t_1' = \Gamma\left[\left(t_2 - t_1\right) - \frac{v}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)\right]$$

$\left(x_2 - x_1\right) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \omega R\left(t_2 - t_1\right)$. C'est-à-dire $\delta t' = t_2' - t_1' = \Gamma\left(t_2 - t_1\right)\left[1 - \frac{v}{c^2}\omega R\right]$.

En remplaçant v par ωR $\delta t' = \delta t\Gamma\left(1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}\right) = \delta t\Gamma\frac{R^2}{c^2}\left(\frac{c^2}{R^2} - \omega^2\right)$.et finalement

$$\boxed{\delta t' = \Gamma\frac{4\pi\omega R^2}{c^2}} \tag{7-8.5}$$

Résumé

Métrique de Schwarzschild

Dans un espace où toute la matière M est concentrée en un point pris comme origine des coordonnées la métrique est

$$\boxed{ds^2 = c^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)}$$

où r_0 est le "*rayon de Schwarzschild*" $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$. Pour la masse soleil $r_0 \approx 3$ km et pour la masse de la terre $r_0 \approx 9,5$ mm.

En mécanique de Newton, r_0 serait le rayon pour lequel la vitesse de libération serait égale à la vitesse de la lumière, c'est-à-dire que la lumière ne pourrait pas s'échapper. Le troue noir serait invisible.

Intervalle de temps

En un point de l'espace l'intervalle de temps $d\tau$ mesuré sur une horloge locale (temps propre) est $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0$. Entre 2 évènements E_1 et E_2 : $\tau_{12} = \frac{1}{c}\int_{E_1}^{E_2}\sqrt{g_{00}}dx^0$.

Dans la métrique de Schwarzschild, où les g_{ij} sont indépendant de x^0, si pour $x^0 = 0$ le temps local est nul, en 2 points situés en r_A et r_B les temps respectifs locaux τ_A et τ_B sont dans le rapport $\boxed{\frac{\tau_A}{\tau_B} = \sqrt{\frac{1-r_0/r_A}{1-r_0/r_B}}}$. Si r_A est très grand et r_B proche de r_0. Pour un observateur au point A les évènements se passant au point B semblent durer très longtemps.

Intervalle de distance spatiale

On peut définir localement une métrique spatiale à 3 dimensions $dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \quad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3)$$

Si les g_{ij} sont indépendant de x^0, il est possible de calculer la distance entre 2 points A et B le long d'une courbe : $L_{AB} = \oint_{AB}\gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$

Dans un disque en rotation $ds^2 = \left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)c^2dt^2 - 2\frac{r^2\omega}{c}cdtd\varphi - dr^2 - r^2d\varphi^2 - dz^2$,

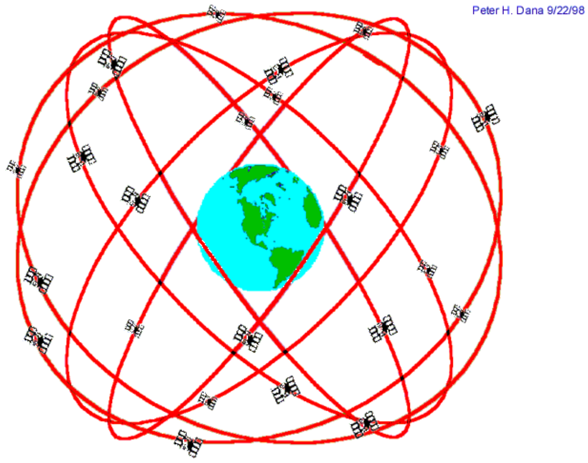
$dl^2 = dr^2 + \frac{dr^2}{1-\omega^2r^2/c^2}d\varphi^2 + dz^2$. Le rapport entre le périmètre d'un cercle centré à l'origine et son rayon est

$$\boxed{\frac{L}{R} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}} > 2\pi}$$

GPS

1 – Position des satellites

Le GPS, c'est-à-dire Global Positioning System, utilise 24 satellites répartis sur 6 orbites circulaires inclinées chacune de 55° sur le plan équatorial. La durée de leur révolution est de 12 heures. Source : http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html



GPS Nominal Constellation
24 Satellites in 6 Orbital Planes
4 Satellites in each Plane
20,200 km Altitudes, 55 Degree Inclination

Leur distance au centre de la Terre est de R_S = 26561 km.

2 – Utilisation

Pour se situer sur la Terre, il faut 3 données, par exemple la latitude, la longitude et l'altitude.

L'observateur à l'instant t et au point repéré par $\vec{r}$ reçoit des satellites les informations sur la position du satellite $\vec{r}_i$, l'instant t_i auquel l'information a été envoyée. Il faut résoudre les équations

$$\left\|\vec{r}-\vec{r}_i\right\|=c\left(t-t_i\right)$$

Il y a en fait 4 inconnues : les 3 composantes du vecteur $\vec{r}$ et l'instant t

Il faut donc également 4 équations pour les déterminer et recevoir les informations de 4 satellites. Si t était parfaitement connu, il suffirait de 3 satellites.

3 – Précision

Des corrections doivent être apportées sur les temps t_i donnés par vles horloges des satellites.

3.1 – Déviation liée à la stabilité des horloges atomiques

La précision recherchée sur le positionnement est de ± 1mètre. L'erreur sur t_i doit être

$$\delta t_i < \frac{1}{c} = \frac{1}{3\times10^8} \approx 3{,}3\times10^{-9} \text{ seconde} = 3{,}3 \text{ ns.}$$

Les horloges à bord des satellites sont des horloges atomiques au césium dont la stabilité est de l'ordre de $\frac{\delta t}{t} \approx 10^{-13}$, pour atteindre une erreur de $3{,}3\times10^{-9}$ seconde, il faut environ 30000 secondes, soit un peu plus de 9 heures. Cette erreur peut être corrigée depuis le sol plusieurs fois par jour.

3.2 – Déviation due à la relativité restreinte.

La vitesse des satellites est de $V_s = \frac{2\pi R_s}{12\times3600} = 3{,}86$ km/h. Rapportée à la vitesse de la lumière $\beta = \frac{v}{c} \approx 1{,}3\times10^{-5}$ La correction due à la contraction du temps est de

$$\frac{\delta t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \approx \frac{\beta^2}{2} = 8{,}5\times10^{-11}$$

Un écart de 3,3 ns est atteint en $\left(3{,}3\times10^{-9}\right)/\left(8{,}5\times10^{-11}\right) \approx 39$ secondes. Au bout d'une heure l'erreur atteint presque 100 mètres et en une journée plus de 2 km.

3.3 – Déviation due à la relativité générale

Le champ d'attraction étant plus faible en altitude que sur la Terre

Nous avons vu, avec la métrique de Schwarzschild que le rapport des temps propres était

$$\frac{\tau_M}{\tau_A} = \sqrt{\frac{1-\frac{r_0}{r_M}}{1-\frac{r_0}{r_A}}} \approx \sqrt{1-r_0\left(\frac{1}{r_M}-\frac{1}{r_A}\right)} \approx 1-\frac{1}{2}r_0\left(\frac{1}{r_M}-\frac{1}{r_A}\right)$$

ou encore
$$\frac{\tau_M-\tau_A}{\tau_A} = -\frac{1}{2}r_0\left(\frac{1}{r_M}-\frac{1}{r_A}\right)$$

Le rayon de Schwarzschild pour la Terre $r_0 = 0{,}95$ cm, $r_M = 26651$ km et $r_A = 6378$ km. Ce qui donne un

$$\frac{\delta t}{t} \approx \frac{1}{2}0{,}95\times10^{-5}\left(\frac{1}{6378}-\frac{1}{26651}\right) \approx 5{,}7\times10^{-10}$$

Une erreur de 3,3 ns est atteinte en (33/5,7) < 6 secondes! En une heure l'erreur atteindrait 600 mètres et en 24 heures 14 km!

Métrique de Schwarzschild
Changement de coordonnées

1 – Rappel

Schwarzschild a établi la métrique

$$\boxed{\begin{aligned} & ds^2 = \left(1-\frac{r_0}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r_0}{r}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\ & \text{avec} \quad r_0 = \frac{2GM}{c^2} \end{aligned}} \qquad (1.1)$$

Cette métrique présente une discontinuité apparente lorsque $r = r_0$

2 – Changement de variable (Livre de HLADIK)

Ce changement de variables est proposé dans le livre "Introduction à la relativité générale", page 169.

On cherche une métrique spatiale

$$\boxed{dl^2 = B(r')\left[dr'^2 + r'^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]} \qquad (2.1)$$

En comparant avec (1.1), il faut $r^2 d\theta = B\left(r'\right) r'^2 d\theta$

$$\boxed{r^2 = B\left(r'\right) r'^2} \qquad (2.2)$$

et

$$\boxed{\frac{dr^2}{1-\frac{r_0}{r}} = B\left(r'\right) dr'^2} \qquad (2.3)$$

En portant $B\left(r'\right)$ tiré de (2.2) dans l'équation (2.3), après intégration (à démontrer)

$$\boxed{r = r'\left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^2} \qquad (2.4)$$

La nouvelle métrique est

$$\boxed{ds^2 = \left(1-\frac{r_0}{4r'}\right)^2 \left(\frac{1}{1+\frac{r_0}{4r'}}\right)^2 c^2dt^2 - \left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^4 \left[dr'^2 + r'^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]} \qquad (2.5)$$

3 – Une démonstration

En reportant, de (2.2), $B(r') = \frac{r^2}{r'^2}$ dans (2.3) :

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{1-\frac{r_0}{r}} = \frac{dr'^2}{r'^2}} \qquad (3.1)$$

Le dénominateur $D(r)$ du 1er membre peut s'écrire

$D(r) = r^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right) = r^2 - r_0 r = \left(r - \frac{r_0}{2}\right)^2 - \frac{r_0^2}{4} = \frac{r_0^2}{4}\left[\left(\frac{r-\frac{r_0}{2}}{\frac{r_0}{2}}\right)^2 - 1\right]$. En posant

$$\boxed{\frac{r-\frac{r_0}{2}}{\frac{r_0}{2}} = \mathrm{ch}\,\alpha} \qquad (3.2)$$

Soit

$$\boxed{r = \frac{r_0}{2}\left(1+\mathrm{ch}\,\alpha\right) = r_0\,\mathrm{ch}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (3.3)$$

et $D(r) = \frac{r_0^2}{4}\left(\mathrm{ch}^2\alpha - 1\right) = \frac{r_0^2}{4}\mathrm{sh}^2\alpha$, et $dr = \frac{r_0}{2}\mathrm{sh}\,\alpha d\alpha$. En reportant dans l'équation (3.1)

$$\frac{\frac{r_0^2}{4}\mathrm{sh}^2\alpha d\alpha^2}{\frac{r_0^2}{4}\mathrm{sh}^2\alpha} = \frac{dr'^2}{r'^2}$$

Ce qui se simplifie en $\frac{dr'}{r'} = d\alpha$, soit

$\alpha = \ln(kr')$ ou $\alpha = \ln\left(\frac{\lambda}{r_0}r'\right)$ et $\frac{\alpha}{2} = \ln\sqrt{\lambda\frac{r'}{r_0}}$ En reportant dans (3.2)

$$r = r_0\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{2}\right)^2 = \frac{r_0}{4}\left(e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{r_0}{4}e^{\alpha}\left(1+\frac{1}{e^{\alpha}}\right)^2$$

Si $\alpha = \ln\left(\frac{\lambda}{r_0} r'\right)$, $e^{\alpha} = \lambda \frac{r'}{r_0}$ et $r = \frac{r_0}{4} \lambda \frac{r'}{r_0} \left(1 + \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^2$

$$\boxed{r = \frac{\lambda}{4} r' \left(1 + \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^2} \tag{3.4}$$

Le calcul de $\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$ donne

$$\boxed{1 - \frac{r_0}{r} = \frac{\left(1 - \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^2}} \tag{3.5}$$

De (2.2) : $B(r') = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^4$

$$\boxed{B(r') = \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^4} \tag{3.6}$$

En reportant (3.5) dans la métrique initiale de Schwarzschild, et (3.6) dans la métrique modifiée spatiale (2.1)la nouvelle métrique s'écrit :

$$\boxed{ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^4 \left[dr'^2 + r'^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\right)\right]} \tag{3.7}$$

Si $\lambda = 4$, on retrouve la métrique (2.5).

On peut remarquer que la discontinuité n'apparait plus que pour $r' = 0$. Toutefois pour $r' = \frac{r_0}{\lambda}$ g_{00} s'annule,mais g_{00} reste toujours positif.

La valeur de $r = 0$ correspond, à partir de (3.4), à

$r' \left(1 + \frac{r_0}{\lambda r'}\right)^2 = r' + 2\frac{r_0}{\lambda} + \frac{r_0^2}{\lambda^2 r'} = \frac{1}{r'}\left(r'^2 + 2\frac{r_0}{\lambda} r' + \frac{r_0^2}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{r'}\left(r' + \frac{r_0}{\lambda}\right)^2 = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{r = 0 \rightarrow r' = -\frac{r_0}{\lambda}} \tag{3.8}$$

Comme λ doit être positif sinon une discontinuité apparaitrait pour $r' = -\frac{r_0}{\lambda} > 0$, la valeur de r' donnée par (3.8) est négative.

De même lorsque $r' \to 0$, l'équation (3.4) montre que $r \to \infty$

4 – Métrique de Kruskal-Szekeres

Cette métrique a été proposée dans les années 60.
Dans la métrique initiale de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 d\Omega^2$$

où
$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

apparait une singularité au point $r = r_0$.

4.1 – Suppression de la singularité. Premier changement de variable : tortoise coordonnée

La variable r a été choisie par analogie avec les coordonnées sphériques, mais en réalité r ne représente pas la distance d'un point à l'origine O. On cherche une autre variable r^*, appelée "tortoise coordonnée" telle que

$$\boxed{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)dr^{*2} = \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}dr^2} \qquad (4.1)$$

La métrique de Schwarzschild s'écrit alors

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\left(c^2dt^2 - dr^{*2}\right) - r^2 d\Omega^2} \qquad (4.2)$$

La singularité a effectivement disparu.

L'équation (4.1) donne $dr^{*2} = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2}$ soit

$$\boxed{dr^* = \frac{dr}{\left|1 - \frac{r_0}{r}\right|}} \qquad (4.3)$$

On pose $\varepsilon =$ Signe de $\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$ et

$$\boxed{dr^* = \varepsilon \frac{1}{1-\frac{r_0}{r}} dr = \varepsilon \frac{r}{r-r_0} dr = \varepsilon \left(1+\frac{r_0}{r-r_0}\right) dr} \tag{4.4}$$

Ce qui donne

$$\boxed{r^* = \varepsilon \left(r + r_0 \ln\left|\frac{r}{r_0} - 1\right|\right)} \tag{4.5}$$

4.2 – Deuxième changement de variable

On introduit les variables intermédiaires u et v

$$\boxed{\begin{array}{l|l} u = ct + r^* & ct = \tfrac{1}{2}(u+v) \\ v = ct - r^* & r^* = \tfrac{1}{2}(u-v) \end{array}} \tag{4.6}$$

Des équations (4.6) il vient $du = cdt + dr^*$ et $dv = cdt - dr^*$ et $c^2dt^2 - dr^{*2} = (cdt + dr^*)(cdt - dr^*) = dudv$.

Avec ces nouvelles variables la métrique de Schwarzschild devient

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dudv - r^2 d\Omega^2} \tag{4.7}$$

4.3 – Retour de la variable *r*

De (4.5) $r^* = \varepsilon \left(r + r_0 \ln\left|\frac{r}{r_0} - 1\right|\right)$ et de $r^* = \frac{1}{2}(u-v)$:

$$r + r_0 \ln \varepsilon \left(\frac{r}{r_0} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\varepsilon (u-v)$$

soit :

$$\ln \varepsilon \left(\frac{r}{r_0} - 1\right) = -\frac{r}{r_0} + \varepsilon \frac{u-v}{2r_0} .$$

C'est-à-dire

$$\varepsilon \left(\frac{r}{r_0} - 1\right) = e^{-\frac{r}{r_0}} e^{\varepsilon\frac{u}{2r_0}} e^{-\varepsilon\frac{v}{2r_0}}$$

En multipliant les deux membres par $\varepsilon \dfrac{r_0}{r}$

$$\boxed{1 - \frac{r_0}{r} = \varepsilon \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} e^{\varepsilon\frac{u}{2r_0}} e^{-\varepsilon\frac{v}{2r_0}}} \tag{4.8}$$

La métrique (4.7) devient $\boxed{ds^2 = \varepsilon \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} e^{\varepsilon \frac{u}{2r_0}} e^{-\varepsilon \frac{v}{2r_0}} du dv - r^2 d\Omega^2}$ (4.9)

4.4 – Un autre changement de variables

Dans la métrique (4.9) on remarque que $e^{\varepsilon \frac{u}{2r_0}} du = 2r_0 \varepsilon d\left(e^{\varepsilon \frac{u}{2r_0}}\right)$ et que $e^{-\varepsilon \frac{v}{2r_0}} dv = -2r_0 \varepsilon d\left(e^{-\varepsilon \frac{v}{2r_0}}\right)$. En choisissant

$$\boxed{U = e^{\varepsilon \frac{u}{2r_0}} \text{ et } V = -e^{-\varepsilon \frac{v}{2r_0}}} \quad (4.10)$$

Ce qui donne $dU = e^{\varepsilon \frac{u}{2r_0}} \left(\frac{\varepsilon}{2r_0} du\right),\ dV = -e^{-\varepsilon \frac{v}{2r_0}} \left(-\frac{\varepsilon}{2r_0} dv\right)$

, $e^{\frac{u}{2r_0}} e^{-\frac{v}{2r_0}} du dv = 4r_0^2 dU dV$ la métrique devient

$$\boxed{ds^2 = \varepsilon \frac{4r_0^3}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} dU dV - r^2 d\Omega^2} \quad (4.11)$$

4.5 – Un dernier changement de variables

On introduit 2 nouvelles variables :

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{U+V}{2} \\ R &= \frac{U-V}{2} \end{aligned}} \quad (4.12)$$

Ce changement de variables s'écrit également

$$U = T + R$$
$$V = T - R$$

et $dU dV = dT^2 - dR^2$. La nouvelle métrique s'écrit finalement :

$$\boxed{ds^2 = \frac{4r_0^3}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} \left(dT^2 - dR^2\right) - r^2 d\Omega^2} \quad (4.13)$$

4.6 – Retour de r et ct

$T = \frac{1}{2}(V+U),\ R = \frac{1}{2}(U-V),$ de (4.10) $U = e^{\varepsilon \frac{u}{2r_0}}$ et $V = -e^{-\varepsilon \frac{v}{2r_0}}$. u et v sont exprimés en (4.6).

$$u = ct + r^* = ct + \varepsilon r + \varepsilon r_0 \ln \varepsilon \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)$$

$$v = ct - r^* = ct - \varepsilon r - \varepsilon r_0 \ln \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)$$

Ce qui donne

$$U = e^{\varepsilon \frac{1}{2} \frac{u}{r_0}} = e^{\varepsilon \frac{ct}{2r_0} + \frac{r}{2r_0} + \frac{1}{2} \ln \varepsilon \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)} = \sqrt{\left| \frac{r}{r_0} - 1 \right|} e^{\frac{r}{2r_0}} e^{\varepsilon \frac{ct}{2r_0}}$$

$$V = -e^{-\varepsilon \frac{1}{2} \frac{v}{r_0}} = -e^{-\varepsilon \frac{ct}{2r_0} + \frac{r}{2r_0} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)} = -\sqrt{\left| \frac{r}{r_0} - 1 \right|} e^{\frac{r}{2r_0}} e^{-\varepsilon \frac{ct}{2r_0}}$$

Et pour les variables T et X :

$$T = \frac{U + V}{2} = \sqrt{\left| \frac{r}{r_0} - 1 \right|} e^{\frac{r}{2r_0}} \frac{e^{\varepsilon \frac{ct}{2r_0}} - e^{-\varepsilon \frac{ct}{2r_0}}}{2}$$

$$R = \frac{U - V}{2} = \sqrt{\left| \frac{r}{r_0} - 1 \right|} e^{\frac{r}{2r_0}} \left(\frac{e^{\varepsilon \frac{ct}{2r_0}} + e^{-\varepsilon \frac{ct}{2r_0}}}{2} \right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \varepsilon \sqrt{\left| \frac{r}{r_0} - 1 \right|} e^{\frac{r}{2r_0}} \operatorname{sh}\left(\frac{ct}{2r_0} \right) \\ R &= \sqrt{\left| \frac{r}{r_0} - 1 \right|} e^{\frac{r}{2r_0}} \operatorname{ch}\left(\frac{ct}{2r_0} \right) \\ ds^2 &= \varepsilon \frac{4r_0^3}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} \left(dT^2 - dR^2 \right) - r^2 d\Omega^2 \end{aligned}} \tag{4.14}$$

Dans l'espace R,T

$$\boxed{R^2 - T^2 = \left| \frac{r}{r_0} - 1 \right| e^{\frac{r}{r_0}}} \tag{4.15}$$

4.7 Détails pour les 2 domaines de r

4.7.1 - $r>r_0$

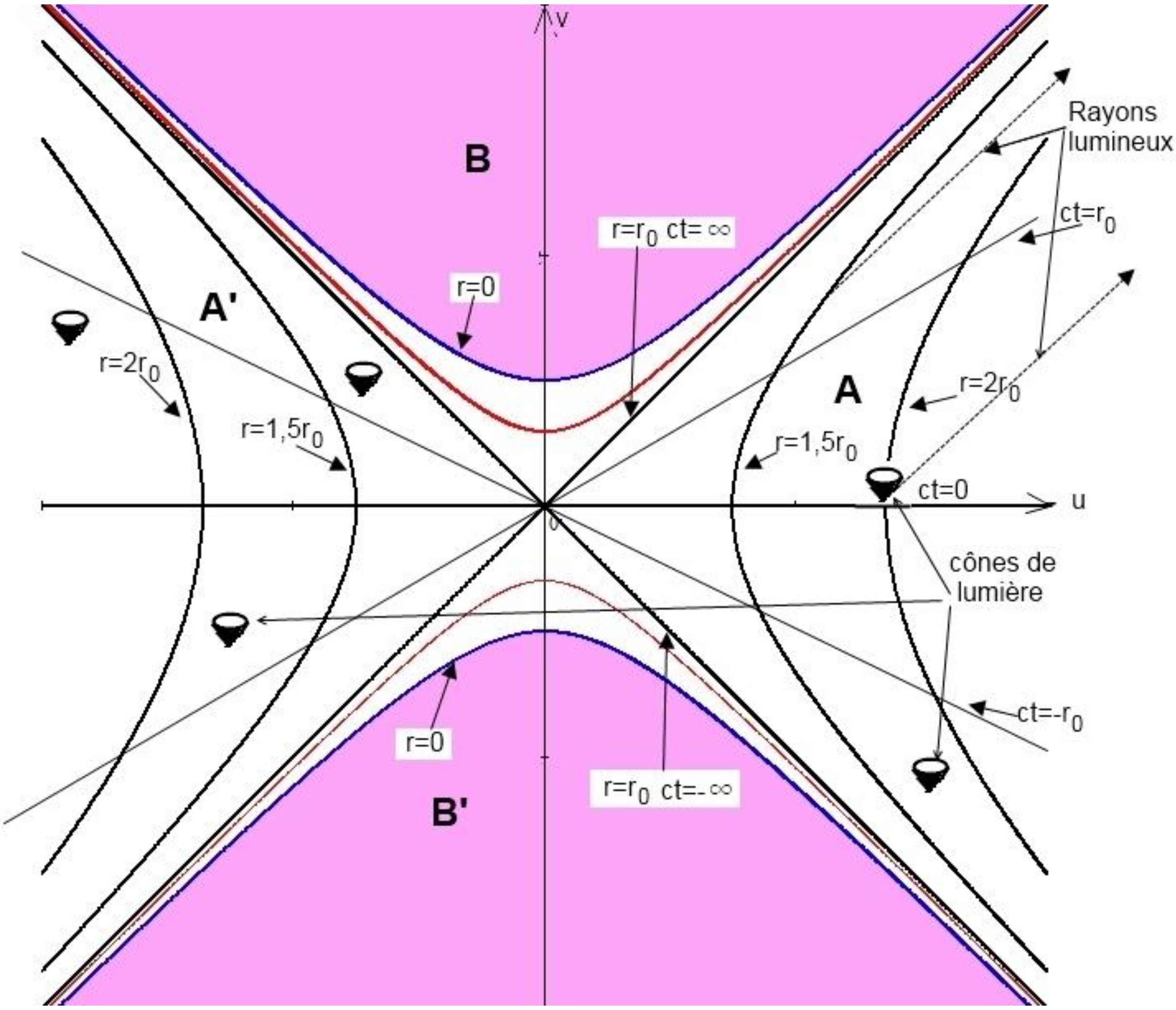
$$\boxed{\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{r}{r_0}-1}\; e^{\frac{r}{2r_0}} \operatorname{sh}\left(\frac{ct}{2r_0}\right) \\ R &= \sqrt{\frac{r}{r_0}-1}\; e^{\frac{r}{2r_0}} c\mathrm{h}\left(\frac{ct}{2r_0}\right) \\ ds^2 &= \frac{4r_0^3}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} \left(dT^2 - dR^2\right) - r^2 d\Omega^2 \\ R^2 - T^2 &= \left(\frac{r}{r_0}-1\right) e^{\frac{r}{r_0}} \qquad \operatorname{th}\left(\frac{ct}{2r_0}\right) = \frac{T}{R} \end{aligned}} \tag{4.16}$$

$\left(R^2 - T^2\right)$ part de 0 lorsque $r = r_0$ et croit vers l'infini lorsque $r \to \infty$

4.7.1 - $r<r_0$

$$\boxed{\begin{aligned} T &= -\sqrt{1-\frac{r}{r_0}}\; e^{\frac{r}{2r_0}} \operatorname{sh}\left(\frac{ct}{2r_0}\right) \\ R &= \sqrt{1-\frac{r}{r_0}}\; e^{\frac{r}{r_0}} c\mathrm{h}\left(\frac{ct}{2r_0}\right) \\ ds^2 &= -\frac{4r_0^3}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} \left(dT^2 - dR^2\right) - r^2 d\Omega^2 \\ R^2 - T^2 &= \left(1-\frac{r}{r_0}\right) e^{\frac{r}{2r_0}} \qquad \operatorname{th}\left(\frac{ct}{2r_0}\right) = -\frac{T}{R} \end{aligned}} \tag{4.17}$$

$\left(R^2 - T^2\right)$ Décroit de 1 à zéro lorsque r varie de zéro à r_0



L'axe des R(noté u) est "horizontal" et l'axe des T(noté v) "vertical".

Les branches hyperboles équilatères correspondent chacune à une valeur de r/r_0. Si $r = r_0$ l'hyperbole est dégénérée en 2 droites qui sont les bissectrices $T = \pm R$. L'intersection de la branche d'hyperbole avec l'axe des T se fait au point $T_r = \sqrt{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) e^{\frac{r}{r_0}}}$.

L'hyperbole la plus haute sur la figure est $r = 0$. Les branches situées entre cette hyperbole et les bissectrices $T = \pm R$ correspondent vaux valeurs de $0 \le r \le r_0$.

Les branches d'hyperbole s'éloignent vers la droite lorsque r croit $R_r = \sqrt{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) e^{\frac{r}{2r_0}}}$

5 – Métrique de Eddington-Finkelstein

En reprenant, comme pour les coordonnées de Kruskal-Szekeres

$$r^* = r + r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0} - 1\right) \quad \text{pour } r > r_0$$

ainsi que
$$\begin{array}{l|l} u = ct + r^* & ct = \tfrac{1}{2}(u+v) \\ v = ct - r^* & r^* = \tfrac{1}{2}(u-v) \end{array}$$

En prenant maintenant

$$cdt = du - dr^* = du - \frac{dr}{1 - \frac{r_0}{r}}$$

Soit

$$c^2dt^2 = du^2 - 2\frac{dudr^*}{(1 - r_0/r)} + \frac{dr^2}{(1 - r_0/r)^2} \tag{4.18}$$

La métrique initiale de Schwarzschild $ds^2 = (1 - r_0/r)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_0/r} - r^2 d\Omega^2$ devient

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)du^2 - 2dudr - r^2 d\Omega^2} \tag{4.19}$$

La singularité n'apparait plus que pour $r = 0$.

On prend une variable "temps" auxiliaire :

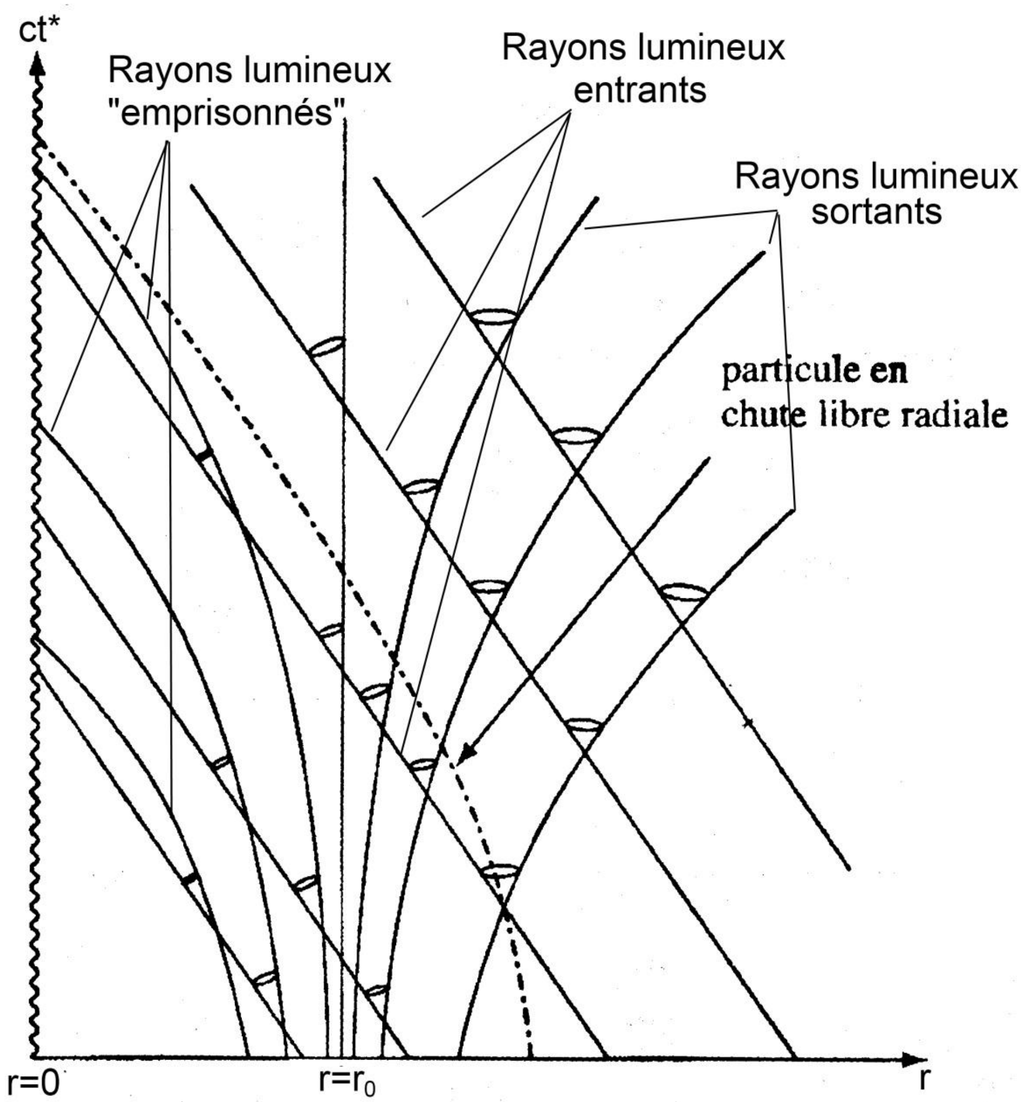
$$\boxed{\begin{array}{l} ct^* = u - r = ct + r_0 \ln\left|\frac{r}{r_0} - 1\right| \\ u = r + ct^* \end{array}} \tag{4.20}$$

La trajet d'un rayon lumineux radial est $ds^2 = du\left[(1 - r_0/r)du - 2dr\right] = 0$. La solution $du = 0$ donne

$$\boxed{\begin{array}{l} r = -ct^* + C^{te} \\ \frac{cdt^*}{dr} = -1 \end{array}} \tag{4.21}$$

La solution $(1 - r_0/r)du - 2dr = 0$ donne $(1 - r_0/r)(dr + cdt^*) - 2dr = 0$ soit

$$\boxed{\frac{cdt^*}{dr} = \frac{1 + r_0/r}{1 - r_0/r} dr} \tag{4.22}$$



Trajet des rayons lumineux, avec la métrique d'Eddington-Finkelstein