8

Périhélie de Mercure – Déviation de la lumière

1 – Mouvement des planètes, périhélie de Mercure

1.1 Mises en équations

L'équation du mouvement d'une particule est l'équation d'Euler-Lagrange

$$\boxed{L_{LE} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} \tag{8.1.1}$$

où $\dot{x}^{\mu} = \dfrac{d}{ds} x^{\mu}$

Les équations différentielles correspondantes à ce Laplacien sont :

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\alpha}} L_{LE}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} L_{LE} = 0} \tag{8.1.2}$$

Si on multiplie le Lagrangien L_{LE} par une constante les équations ne changent pas. On prendra donc comme Laplacien $g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}$. soit :

$$\boxed{L = c^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} \dot{r}^2 - r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2\right)} \tag{8.1.3}$$

<u>Variable *t*</u>

L est indépendant de *t* donc $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial \dot{t}} = C^{te} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{t}} = 2c^2\left(1 - \dfrac{r_0}{r}\right)\dot{t} \end{cases}$

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\dot{t} = A$$

$$\boxed{\dot{t} = \frac{A}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}} \tag{8.1.4}$$

<u>Variable φ</u>

L est indépendant de φ →

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -2r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = C^{te}$$

$$\boxed{r^2 \dot{\varphi} = \frac{B}{\sin^2 \theta}} \tag{8.1.5}$$

Variable θ

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -2r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -2r^2 \dot{\theta}$ et

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(r^2 \dot{\theta}\right) = r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2} \tag{8.1.6}$$

Variable r

Si on se reporte à $ds^2 = c^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\right)$, on voit que $L = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$.

De plus, par un choix convenable de l'origine des coordonnées θ et φ, la trajectoire sera situé dans le "plan" $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$. L'équation (8.1.5) devient $r^2 \dot{\varphi} = B$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{B}{r^2}} \tag{8.1.7}$$

C'est l'équivalent de *loi des aires* de Kepler.

En reportant (8.1.4) et (8.1.7) dans L : $L = 1 = c^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\frac{A^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 \frac{B^2}{r^4}$

soit : $1 - \frac{r_0}{r} = c^2 A^2 - \dot{r}^2 - \frac{B^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$.

Si $r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{ds}}{\frac{d\varphi}{ds}} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$ ou $\dot{r} = r'\dot{\varphi} = r'\frac{B}{r^2}$, l'expression ci-dessus devient

$$\boxed{1 - \frac{r_0}{r} = c^2 A^2 - r'^2 \frac{B^2}{r^4} - \frac{B^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} \tag{8.1.8}$$

Le calcul de l'orbite se simplifie en posant $u = \frac{1}{r}$, $r = \frac{1}{u} \Rightarrow r' = -\frac{u'}{u^2}$. L'équation (8.1.8) devient

$$\boxed{1-r_0u=c^2A^2-B^2u'^2-B^2u^2\left(1-r_0u\right)} \qquad (8.1.9)$$

En dérivant (8.1.9) par rapport à φ :

$-r_0u'=-2B^2u''u'-2B^2uu'+3B^2u^2u'$, soit ne mettant u' en facteur :

$$\boxed{u'\left[2B^2\left(u''+u\right)-r_0\left(1+3B^2u^2\right)\right]=0} \qquad (8.1.10)$$

La première solution $u'=0$, soit $u=\frac{1}{r}=C^{te}$, la géodésique est un cercle, centré à l'origine.

La deuxième solution

$$\boxed{u''+u=\frac{r_0}{2B^2}+\frac{3}{2}r_0u^2} \qquad (8.1.11)$$

1.2 Interprétation

Dans la mécanique de Newton, la vitesse de la planète, en prenant le centre du soleil comme origine des coordonnées, est

$$V^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Le champ de gravitation est $f(r)=-\frac{MG}{r}$. Le lagrangien est

$$L_N=\tfrac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]-mf(r)=m\left[\tfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)-f(r)\right]$$

Les équations du mouvement sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_E}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L_E}{\partial r}=0 \Rightarrow m\left[\frac{d}{dt}\dot{r}-r\dot{\varphi}^2+f'(r)\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_E}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L_E}{\partial \varphi}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d_2r}{dt^2}=r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2-f'(r) \\ r^2\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)=C \end{array}} \qquad (8.1.12)$$

La deuxième équation est la loi des aires.

En posant $u=\frac{1}{r}$: $\frac{d\varphi}{dt}=Cu^2$

La première équation de (8.1.12) devient $\frac{d_2r}{dt^2} = C^2u^3 - f'(r)$. $\frac{d_2r}{dt^2}$ se transforme en :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}Cu^2 = -C\frac{du}{d\varphi} = -Cu' \text{ et}$$

$$\frac{d_2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(-C\frac{du}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} = -C\frac{d_2u}{d\varphi^2}Cu^2 = -C^2u^2\frac{d_2u}{d\varphi^2} - C^2u^2u''.$$

En remplaçant dans la première équation de (8.1.12) $-C^2u^2u'' = \frac{1}{u}C^2u^4 - f'(r)$.

$$C^2u^2\left(u''+u\right) = f'(r)$$

$$\boxed{\left(u''+u\right) = \frac{1}{C^2}r^2f'(r)} \qquad (8.1.13)$$

Si $f(r) = -\frac{MG}{r}$ alors $\frac{1}{C^2}r^2f'(r) = \frac{MG}{C^2}$ et l'équation (8.1.13) devient

$$\boxed{u''+u = \frac{MG}{C^2}} \qquad (8.1.14)$$

La valeur $\frac{MG}{C^2}$ est à comparer au premier terme du second membre de (8.1.11)

$$\frac{r_0}{2B^2} = \frac{MG}{c^2B^2}$$

Comparaison entre *B* et *C*

Dans (8.1.7) $B = r^2\frac{d\varphi}{ds}$, avec

$$ds = \left[\left(1-\frac{r_0}{r}\right)c^2t^2 - \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2\right]^{\frac{1}{2}} = cdt\left[\left(1-\frac{r_0}{r}\right) - \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1}\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{rd\varphi}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Lorsque les vitesses sont lentes, c'est à dire $\frac{V^2}{c^2} = \frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{c^2} << 1$ alors

$$ds \approx cdt \text{ et } B = r^2\frac{d\varphi}{ds} \approx r^2\left(\frac{1}{c}\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{1}{c}C \text{ ou}$$

$$\boxed{C = cB} \qquad (8.1.15)$$

et $\frac{MG}{c^2B^2} \approx \frac{MG}{C^2}$

Le terme du second membre de (8.1.11) donne l'approximation newtonienne de la gravitation.

Cela justifie également le choix fait pour la valeur de $K = -\frac{2MG}{c^2}$ dans l'expression $e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2MG}{c^2 r}$.

Dans la mécanique newtonienne, il est possible de calculer C. Si l'orbite est une ellipse de ½ grand axe a, de ½ petit axe b et d'excentricité et la période de révolution (année) T la surface de l'ellipse πab est également $\pi ab = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{T}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}CT$.

$$C = \frac{2\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}.$$

$$\boxed{C^2 = \frac{4\pi^2 a^4\left(1-e^2\right)}{T^2}} \qquad (8.1.16)$$

1.3 Périhélie

1.3.1 Equation à intégrer

Il faut intégrer l'équation (8.1.11) $u'' + u = \frac{r_0}{2B^2} + \frac{3}{2}r_0 u^2$.

Quelles sont les valeurs de $\frac{r_0}{2B^2} \approx \frac{MG}{C^2}$ et de $\frac{3}{2}r_0 u^2$?

Pour la Terre $C = r^2\frac{d\varphi}{dt}$. Si l'orbite est assimilée à un cercle $r = 1,5\times 10^{11} m$. la vitesse périphérique $r\frac{d\varphi}{dt}$ est environ $\frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 1,5\times 10^{11}}{365,25\times 24\times 3600} \simeq 29860 m/s$,

$$C = r\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right) \simeq 4.5\times 10^{15}$$

$$\frac{MG}{C^2} \simeq 6,67\times 10^{-12}$$

$$\frac{3}{2}r_0 u^2 \simeq \frac{3}{2}(3000)\left(\frac{1}{1,5\times 10^{11}}\right)^2 \simeq 2\times 10^{-19}$$

$$\boxed{\frac{\frac{3}{2}r_0 u^2}{\frac{r_0}{2B^2}} \simeq 3\times 10^{-8}} \qquad (8.1.17)$$

Le second terme est très petit devant le premier.

Pour résoudre (8.1.11) $u'' + u = \frac{r_0}{2B^2} + \frac{3}{2} r_0 u^2$, on utilisera la méthode dite "méthode des perturbation".

1.3.2 Méthode d'intégration

Pour simplifier la présentation on pose

$$A = \frac{r_0}{2B^2} \qquad \frac{3}{2} r_0 = \frac{h}{A} \tag{8.1.18}$$

.

L'équation à intégrer devient

$$\boxed{u'' + u = A + \frac{h}{A} u^2} \tag{8.1.19}$$

On suppose que la solution u est développée suivant les puissances croissantes de h : $u = u_0(\varphi) + h u_1(\varphi) + \varepsilon h$, ε tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.En reportant dans (8.1.19) :

$$\left(u_0'' + u_0\right) + h\left(u_1'' + u_1\right) + \varepsilon h = A + \frac{h}{A}\left(u_0 + h u_1 + \varepsilon h\right)^2$$

Ou encore

$$\boxed{\left(u_0'' + u_0 - A\right) + h\left(u_1'' + u_1 - \frac{1}{A} u_0^2\right) + \varepsilon h = 0} \tag{8.1.20}$$

Dont on cherche les solutions par

$$\boxed{u_0'' + u_0 - A = 0} \tag{8.1.21}$$

$$\boxed{u_1'' + u_1 - \frac{1}{A} u_0^2 = 0} \tag{8.1.22}$$

L'équation (8.1.21) a pour solution $u_0 = A + D\cos\varphi + E\sin\varphi$. C'est la solution classique de la mécanique de Newton, une conique dont le foyer est à l'origine, c'est à dire le centre du soleil. Par un choix convenable de l'origine des angles φ on peut écrire cette solution

$$\boxed{u_0 = A + D\cos\varphi} \tag{8.1.23}$$

L'équation (8.1.22) devient

$$u_1'' + u_1 = \frac{1}{A}\left(A + D\cos\varphi\right)^2 = A + 2D\cos\varphi + \frac{D^2}{A}\cos^2\varphi$$

Sachant que $1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi$

$$\boxed{u_1''+u_1=\left(A+\frac{D^2}{2A}\right)+2D\cos\varphi+\frac{D^2}{2A}\cos(2\varphi)} \qquad (8.1.24)$$

La solution de l'équation sans second membre est inutile car c'est la même que celle de(8.1.21). Seules les solutions particulières sont utiles :

$$\boxed{u_1''+u_1=\left(A+\frac{D^2}{2A}\right) \quad\Rightarrow\quad u_{11}=\left(A+\frac{D^2}{2A}\right)} \qquad (8.1.25)$$

Pour $u_1''+u_1=2D\cos\varphi$, comme $\cos\varphi$ est solution de l'équation sans second membre, il faut chercher une solution de la forme $u_{12}=\varphi(K_1\cos\varphi+K_2\sin\varphi)$

$$\boxed{u_1''+u_1=2D\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad u_{12}=D\varphi\sin\varphi} \qquad (8.1.26)$$

C'est ce terme qui va expliquer la précession du périhélie de Mercure.

Pour $u_1''+u_1=\dfrac{D^2}{2A}\cos(2\varphi)$ la solution est de la forme $K_1\cos(2\varphi)+K_2\sin(2\varphi)$

$$\boxed{u_1''+u_1=\frac{D^2}{2A}\cos(2\varphi) \quad\Rightarrow\quad u_{13}=-\frac{D^2}{6A}\cos(2\varphi)} \qquad (8.1.27)$$

Finalement

$$\boxed{u_1=\left(A+\frac{D^2}{2A}\right)+D\varphi\sin\varphi-\frac{D^2}{6A}\cos(2\varphi)} \qquad (8.1.28)$$

Et pour $u+hu_1$:

$$\boxed{u=\left[\left(A+hA+h\frac{D^2}{2A}\right)+D(\cos\varphi+h\varphi\sin\varphi)-h\frac{D^2}{6A}\cos(2\varphi)\right]+\varepsilon h} \qquad (8.1.29)$$

Le dernier terme, entre les crochets, introduit une petite variation périodique dans la distance de la planète au centre du soleil.

Le second terme, $h\varphi$ étant une "petite valeur" peut s'écrire $\cos(\varphi-h\varphi)=\cos\varphi\cos(h\varphi)+\sin\varphi\sin(h\varphi)=\cos\varphi+h\varphi\sin\varphi+\varepsilon h$, c'est à dire que on peut écrire $u=A'+D\cos((1-h)\varphi)-h\dfrac{D^2}{6A}\cos(2\varphi)$

en négligeant le terme εh.

1.3.3 Résultat

Le périhélie se présente lorsque la planète est le plus près du soleil, c'est à dire lorsque $u=1/r$ est maximum, c'est à dire $(1-h)\varphi=2n\pi$, $\varphi=\dfrac{2n\pi}{1-h}$, pour 2 périhélies successifs

$(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=\dfrac{2\pi}{1-h}\cong 2\pi+2h\pi$. Tout se passe comme si le grand axe de l'ellipse tournait autour du soleil. Pour une période l'angle dont a tourné le grand axe est égal à $\Delta\psi = 2h\pi$.

D'après (8.1.18) $h=\dfrac{3}{2}r_0A=\dfrac{3}{4}\dfrac{r_0^2}{B^2}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2GM}{c^2}\right)^2\dfrac{c^2}{C^2}=\dfrac{3G^2M^2}{c^2C^2}$

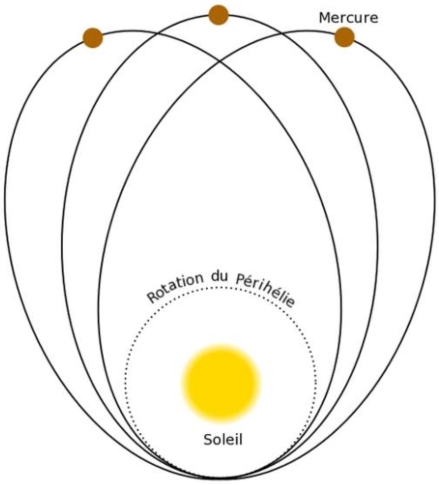
$$\boxed{\Delta\psi=\frac{6\pi G^2M^2}{c^2C^2}} \qquad (8.1.30)$$

d'après (8.1.16)

$$\boxed{\Delta\Psi=\frac{3G^2M^2T^2}{2\pi c^2a^4(1-e^2)}} \qquad (8.1.31)$$

Avec la formule (8.1.31) et $a=5,7909\times10^{10}$, $e=0,20563$ et $T=87,5693$ jours,, le nombre d'années sidérales en 1 siècle : $N=\dfrac{100\times365,25}{87,5693}=415,202$

$\Delta\Psi = 43,42''$ par siècle, la mesure donne $42,6''\pm1,0''$



La troisième loi de Kepler s'écrit, en mécanique newtonienne $\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{GM}{4\pi^2}$, ou $GM=4\pi^2\dfrac{a^3}{T^2}$. En reportant cette valeur dans (8.1.31), il vient

$$\boxed{\Delta\Psi=\frac{24\pi^3a^2}{c^2T^2\left(1-e^2\right)}} \qquad (8.1.32)$$

C'est l'expression qui avait été donnée par Einstein.

Si on assimile l'ellipse à un cercle de rayon r, la vitesse périphérique le la planète étant v, $C = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r(r\frac{d\varphi}{dt}) = rv$

$$\boxed{\Delta\psi = \frac{6\pi G^2 M^2}{c^2 r^2 v^2}} \qquad (8.1.33)$$

En utilisant $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$

$$\boxed{\Delta\psi = \frac{3}{2}\pi\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\frac{1}{\beta^2} \quad \text{avec } \beta = \frac{v}{c}} \qquad (8.1.34)$$

Application pour la planète Mercure :

$r = 58\times10^6 km = 5{,}8\times10^{10} m$

La vitesse orbitale $v = \frac{2\pi r}{87.9693\times24\times3600} = 48166$ m/s, le nombre d'années sidérales en 1 siècle : $N = \frac{100\times365{,}25}{88} = 415$. Si $\Delta\psi$ est exprimé en seconde d'arc, en un siècle la rotation de l'axe de Mercure est

$$\Delta\Psi = N\left(\frac{180}{\pi}3600\right)\frac{3}{2}\pi\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\frac{1}{\beta^2} = 0{,}972\times10^6 N\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\frac{1}{\beta^2}$$

Ce calcul donne $\Delta\Psi = 41{,}66''$ par siècle

1.3.4 Remarque

La formule (8.1.31) peut s'écrire $\Delta\Psi = \left(\frac{3G^2M^2}{2\pi c^2}\right)\left(\frac{\mathrm{T}^2}{a^4\left(1-e^2\right)}\right)$. Les valeurs de la première parenthèse est une caractéristique du système solaire. Pour avoir la valeur au bout de 100 ans terrestre de ce décalage du périhélie il faut multiplier ce $\Delta\Psi$ par le nombre de révolutions sidérales de la planète considérée c'est à dire , ce qui donne un $\Delta\Psi_S$ séculaire proportionnel à $\frac{T}{a^4\left(1-e^2\right)}$. Comme $\frac{T^2}{a^3}$ est constant, 3ème loi de Kepler, $\Delta\Psi_S$ est inversement proportionnel à $a^{5/2}\left(1-e^2\right)$, ou, à quelques pour cents près à $a^{5/2}$. Le demi grand axe de la Terre $a_T \simeq 150\times10^6 km$. cela donne pour la Terre $\Delta\Psi_S = 4''$. Les mesures donnent $5{,}0\pm1{,}2$.

2 Déflexion de la lumière

Pour un rayon lumineux $ds = 0$. Il n'est plus possible de dériver par rapport à s. (8.1.3) devient, en supposant $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$L = c^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 = 0 \qquad (8.2.1)$$

Les dérivées sont exprimées par rapport à une variable λ.

$r^2\dot{\varphi} = B$ reste valable ainsi que $\dot{t} = \frac{A}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}$. En reportant dans (8.2.1) il vient

$c^2\frac{A^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}\dot{r}^2 - \frac{B^2}{r^2} = 0$, ou

$$\boxed{c^2A^2 = \dot{r}^2 + \frac{B^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} \qquad (8.2.2)$$

Si $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ est la dérivée de r $\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\lambda} = r'\dot{\varphi} = r'\frac{B}{r^2}$, en reportant dans (8.2.2) :

$$\boxed{c^2A^2 = B^2\left(\frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{r_0}{r^3}\right)} \qquad (8.2.3)$$

Si $u = \frac{1}{r}$ $r' = -\frac{u'}{u^2}$ et (8.2.3) devient

$$\boxed{c^2A^2 = B^2\left(u'^2 + u^2 - r_0u^3\right)} \qquad (8.2.4)$$

Et en dérivant par rapport à φ :

$$\boxed{u'\left(u'' + u - \frac{3}{2}r_0u^2\right) = 0} \qquad (8.2.5)$$

Il y a une solution $u' = 0$, c'est à dire $u = C^{te} = u_0$. Cette solution n'est valable que $c^2A^2 = B^2u_0^2\left(1 - r_0u_0\right)$. Dans ce cas le rayon lumineux décrit un cercle.

L'autre solution est obtenue par

$$\boxed{u'' + u = \frac{3}{2}r_0u^2} \qquad (8.2.6)$$

Le terme $\frac{3}{2}r_0 u = \frac{3}{2}\frac{r_0}{r}$ est petit. Pour le soleil, si on considère un rayon lumineux passant à proximité de sa surface, $R \simeq 696000$ km et devant $\frac{3}{2}\frac{r_0}{R} \simeq 6{,}5\times 10^{-6}$. Pour résoudre on pose

$u = u_0(\varphi) + hu_1(\varphi) + \varepsilon h$ avec $u'' + u = hu^2$: $\left(u_0'' + u_0\right) + h\left(u_1'' + u_1\right) + \varepsilon h = hu^2$, avec $h = \frac{3}{2}r_0$

En identifiant $u_0'' + u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = K_1 \cos\varphi + K_2 \sin\varphi$, c'est l'équation d'une droite. En choisissant l'origine des angles φ on prendra

$$\boxed{u_0 = \frac{1}{R}\cos\varphi} \qquad (8.2.7)$$

La seconde équation $u_1'' + u_1 = u^2 = \frac{1}{R^2}\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2}\left(1+\cos(2\varphi)\right)$. En l'écrivant sous la forme $2R^2\left[\left(u_1 - \frac{1}{2R^2}\right)'' + \left(u_1 - \frac{1}{2R^2}\right)\right] = v_1'' + v_1 = \cos(2\varphi)$ avec $v_1 = 2R^2\left(u_1 - \frac{1}{2R^2}\right)$.

La solution de $v_1'' + v_1 = \cos(2\varphi)$ est de la forme $v_1 = K\cos(2\varphi)$: $\left(u_1 - \frac{1}{2R^2}\right)$

$$v_1 = -\frac{1}{3}\cos(2\varphi)$$

$$u_1 = \frac{1}{2R^2}\left(1+v_1\right)$$

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2R^2} - \frac{1}{6R^2}\cos(2\varphi)} \qquad (8.2.8)$$

La solution complète est

$$\boxed{u = \frac{1}{R}\cos\varphi + \frac{3r_0}{4R^2} - \frac{r_0}{4R^2}\cos(2\varphi)} \qquad (8.2.9)$$

Comme $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$,

$$\boxed{u = \frac{r_0}{R^2} + \frac{1}{R}\cos\varphi - \frac{r_0}{2R^2}\cos^2\varphi} \qquad (8.2.10)$$

Les points à l'infini sont obtenus lorsque $u \to 0$. $\cos\varphi = \frac{R}{r_0} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + 2}$, seule la racine correspondant au signe moins convient ($\left|\cos\varphi\right| < 1$)

$\cos\varphi = \frac{R}{r_0} - \sqrt{\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + 2} = \frac{R}{r_0} - \frac{R}{r_0}\sqrt{1 + 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2}$. $\frac{r_0}{R}$ étant "petit"

$\sqrt{1 + 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2} = 1 + \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{r_0}{R}\right)^2$ et

$$\boxed{\cos\varphi \cong -\frac{r_0}{R} = -\frac{2MG}{c^2R}} \qquad (8.2.11)$$

Il y a 2 angles $\varphi_1 > \frac{\pi}{2}$ et $\varphi_2 < -\frac{\pi}{2}$

Pour le soleil $R = 696000$ km, $r_0 = 3$ km $\Rightarrow \cos\varphi = -4{,}31 \times 10^{-6}$

Angle φ_1

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \delta_1$, $\cos\varphi_1 = -\sin\delta_1$ et donc $\sin\delta_1 = \frac{r_0}{R} = \frac{2MG}{c^2R}$, l'angle δ_1 étant très petit $\delta_1 \approx \sin\delta_1$

$$\boxed{\delta_1 = \frac{2MG}{c^2R}} \qquad (8.2.12)$$

Angle φ_1

$\varphi_2 = -\frac{\pi}{2} - \delta_2$, $\cos\varphi_2 = -\sin\delta_2$, sans refaire de calculs

$$\boxed{\delta_2 = \frac{2MG}{c^2R}} \qquad (8.2.13)$$

Déflexion totale

Le rayon vient de l'infini de la direction à l'infini $-\frac{\pi}{2} - \delta_2$ et repart à l'infini dans la direction $\frac{\pi}{2} + \delta_1$.

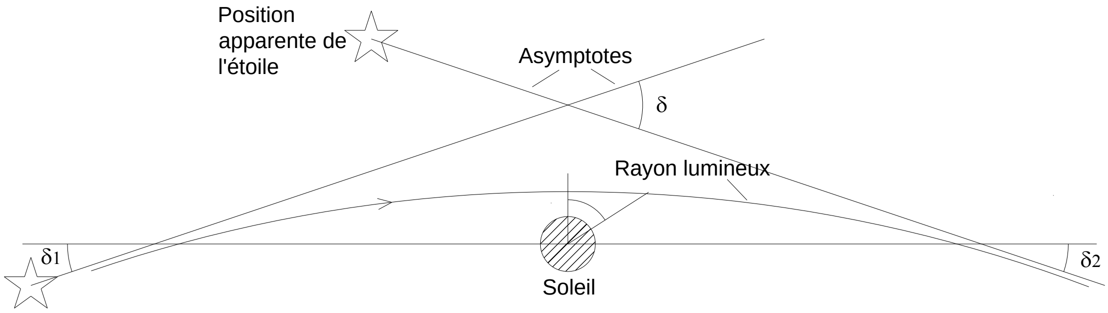
la déflexion totale est donc $\delta = \delta_1 + \delta_2$

$$\boxed{\delta = \frac{4MG}{c^2R}} \qquad (8.2.14)$$

Pour un rayon lumineux passant à proximité du soleil la déflexion est donc

$$\delta_S = \frac{4MG}{c^2 R} = 2\frac{r_0}{R} = 8,62\times 10^{-6} \text{ radian}$$

$$\boxed{\delta_S = 1,77''} \qquad (8.2.15)$$



Comparaison avec la mécanique newtonienne

La lumière étant assimilée à une particule, sa trajectoire obéit à l'équation (8.1.14)

$$u'' + u = \frac{MG}{C^2}$$

$u = \frac{MG}{C^2} + A\cos\varphi$. Pour $\varphi = 0, u = \frac{1}{R}$ $\Rightarrow u = \frac{MG}{C^2} + \left(\frac{1}{R} - \frac{MG}{C^2}\right)\cos\varphi$. La vitesse est $V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ avec $r = \frac{1}{u}, \frac{dr}{d\varphi} = r' = -\frac{u'}{u^2}$ et

$$V^2 = \left(u^2 + u'^2\right)\frac{1}{u^4}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Comme $C = r^2\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{1}{u^4}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C^2$

$$V^2 = C^2\left(u^2 + u'^2\right).$$

Si pour $\varphi = 0, V = c, u = \frac{1}{R}$ et $u' = 0$ $c^2 = C^2\frac{1}{R^2}$, $C^2 = c^2R^2$. la trajectoire est

$$u = \frac{MG}{c^2R^2} + \left(\frac{1}{R} - \frac{MG}{c^2R^2}\right)\cos\varphi$$

Les points à l'infini sont obtenus pour $u = 0$ soit $\cos\varphi = -\frac{\frac{MG}{c^2R^2}}{\frac{1}{R} - \frac{MG}{c^2R^2}}$

$$\cos\varphi = -\frac{\frac{MG}{c^2R}}{1-\frac{MG}{c^2R}}$$

$\frac{MG}{c^2R} = \frac{1}{2}\frac{r_0}{R}$ étant "petit"

$$\cos\varphi \approx -\frac{MG}{c^2R}$$

En refaisant les mêmes calculs que pour la déflexion en relativité générale, on trouvera évidemment

$$\boxed{(\delta_S)_{Newton} = \frac{2MG}{c^2R}} \tag{8.2.16}$$

C'est la moitié de la valeur donnée par la relativité générale.

3 Remarques

3.1 Newton

L'équation (8.1.13) $(u'' + u) = \frac{1}{C^2} r^2 f'(r)$ donne si $f(r) = -\frac{MG}{r}$ l'attraction newtonienne classique. $u'' + u = \frac{MG}{C^2}$. La relativité générale conduit à l'équation (8.1.11) $u'' + u = \frac{r_0}{2B^2} + \frac{3}{2} r_0 u^2$ en remplaçant r_0 par sa valeur $\frac{2MG}{c^2}$

$$u'' + u = \frac{MG}{c^2B^2} + \frac{3MG}{c^2}\frac{1}{r^2}$$

D'après (8.1.15) $C = cB$

$$u'' + u = \frac{MG}{C^2} + \frac{3MG}{c^2}\frac{1}{r^2}$$

Ce qui donnerait $\frac{1}{C^2} r^2 f'(r) = \frac{MG}{C^2} + \frac{3MG}{c^2}\frac{1}{r^2}$

$$f'(r) = \frac{MG}{r^2} + \frac{3MG}{c^2} C^2 \frac{1}{r^4}$$

Ce qui revient à ajouter au terme classique d'attraction en $\frac{1}{r^2}$ un terme correctif en $\frac{1}{r^4}$.

Cette solution n'est pas rigoureuse car le terme C^2 est obtenu à partir le la loi de Newton sans terme correctif.

3.2 Valeur de π

L'élément de longueur de Schwarzschild est

$$dl^2 = \frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

Si pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ on calcul la longueur du cercle de rayon r_1 :

$$L_1 = \int dl = \int_0^{2\pi} r_1 d\varphi = 2\pi r_1$$

Pour le rayon r_2 : $L_2 = 2\pi r_2$ et $\Delta L = L_2 - L_1 = 2\pi\left(r_2 - r_1\right)$

Si sur un rayon, par exemple $\varphi = \theta = 0$ on calcule la distance entre les points de coordonnées radiales r_1 et r_2 : $\Delta r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}} > \left(r_2 - r_1\right)$

$$\frac{\Delta L}{\Delta r} < 2\pi$$

3.3 Le temps

Pour un objet immobile le temps est $c\tau = \sqrt{g_{00}}t = c\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}t$, $\tau = \sqrt{1-\frac{r_0}{r}}t$. Par rapport au temps à l'infini le temps local est ralenti. Pour $r = r_0$, il semble arrêté.

3.4 Planéité des géodésiques

On peut démontrer que les géodésiques sont situées dans des plans passant par le centre de la masse.

En reprenant l'équation (8.1.5) $r^2\dot{\varphi} = \frac{B}{\sin^2\theta}$, on en tire $r^2 = \frac{B}{\sin^2\theta\dot{\varphi}}$ et en reportant dans (8.1.6) $\frac{d}{ds}\left(r^2\dot{\theta}\right) = r^2 \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2$:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{B}{\sin^2\theta}\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\right) = \frac{B}{\sin^2\theta}\frac{1}{\dot{\varphi}}\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = B\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi}$$

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\theta}}{\sin^2\theta\dot{\varphi}}\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi}} \qquad (8.3.1)$$

En multipliant les 2 membres de (8.3.1)par $\dfrac{\dot\theta}{\sin^2\theta\dot\varphi}$:

$$\frac{\dot\theta}{\sin^2\theta\dot\varphi}\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot\theta}{\sin^2\theta\dot\varphi}\right)=\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\dot\theta\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot\theta}{\sin^2\theta\dot\varphi}\right)^2=-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\text{ soit}$$

$$\left(\frac{\dot\theta}{\sin^2\theta\dot\varphi}\right)^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\theta}$$

$$\boxed{\left(\frac{\dot\varphi}{\dot\theta}\right)^2=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta\left(\sin^2\theta-\sin^2\alpha\right)}}\tag{8.3.2}$$

En s'inspirant de la recherche des géodésiques d'une sphère

$$d\varphi^2=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta\left(\sin^2\theta-\sin^2\alpha\right)}d\theta^2=\frac{\sin^2\alpha\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^2}{\sin^2\theta\left[\sin^2\theta-\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\sin^2\alpha\right]}d\theta^2$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^2}{\sin^2\theta\left(\sin^2\theta\cos^2\alpha-\cos^2\theta\sin^2\alpha\right)}$$

et en divisant le numérateur et le dénominateur par $\sin^4\theta\cos^2\alpha$

$$d\varphi^2=\frac{tg^2\alpha\left(1+\dfrac{1}{tg^2\theta}\right)^2d\theta^2}{1-\left(\dfrac{tg\alpha}{tg\theta}\right)^2}\text{, comme } d\left(\frac{1}{tg\theta}\right)=-\left(1+\frac{1}{tg^2\theta}\right)d\theta$$

$$d\varphi^2=\frac{tg^2\alpha\left[d\left(\dfrac{1}{tg\theta}\right)\right]^2}{1-\left(\dfrac{tg\alpha}{tg\theta}\right)^2}=\frac{\left[d\left(\dfrac{tg\alpha}{tg\theta}\right)\right]^2}{1-\left(\dfrac{tg\alpha}{tg\theta}\right)^2}$$

soit

$$\boxed{d\varphi=\pm\frac{d\left(\dfrac{tg\alpha}{tg\theta}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{tg\alpha}{tg\theta}\right)^2}}}\tag{8.3.3}$$

dont la solution est $\varphi=\pm\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{tg\alpha}{tg\theta}\right)+C$ ou

$\dfrac{tg\alpha}{tg\theta}=\sin(\varphi-C)=\left(\sin\varphi\cos C-\sin C\cos\varphi\right)$. (le signe $\pm$ est inclus dans le choix de la constante C).

En multipliant les 2 membres par $\frac{\sin\theta}{tg\alpha}$ et en posant $\frac{\cos C}{tg\alpha} = a$ et $-\frac{\sin C}{tg\alpha} = b$

$$\boxed{\cos\theta = a\sin\theta\sin\varphi + b\sin\theta\cos\varphi} \qquad (8.3.4)$$

Considérons une sphère de rayon R centrée à l'origine, si on multiplie les 2 membres de (8.3.4) par R on retrouve $z = bx + ay$, c'est à dire un plan passant par le centre de la sphère.

En d'autres termes la relation (8.3.4) signifie que si les angles φ et θ sont liés par cette relation les point s'intersection de la droite OM, joignant l'origine au point M de la géodésique décrit un grand cercle d'une sphère centrée à l'origine. Cela permet d'affirmer que la géodésique est située dans un plan passant par le centre de la masse.

Résumé

Périhélie de Mercure

L'utilisation de la métrique de Schwarzschild permet de retrouver comme approximation la mécanique de Newton.

Si $u = \frac{1}{r}$, les équations différentielles reliant le rayon r et l'angle θ dans le plan de l'orbite de la planète sont :

Newton : $$u'' + u = \frac{MG}{C^2}$$

Relativité générale : $$u'' + u = \frac{r_0}{2B^2} + \frac{3}{2} r_0 u^2$$

C et B sont des constantes. Le second terme du second membre est en général négligeable devant le premier. Pour la Terre le rapport est de l'ordre de 10^{-8}.

Appliqué à l'orbite de Mercure, le calcul montre une précession du périhélie $43{,}4''$ par siècle, en très bon accord avec les observations.

Déflexion de la lumière

Au passage à une distance R du centre d'une masse M la métrique de Schwarzschild calcule une déflexion d'un rayon lumineux

$$\delta\varphi = \frac{4MG}{c^2 R}$$

Cette valeur est exactement le double que celle qui est calculé en utilisant la mécanique de Newton et en considérant que la lumière est constituée de "grains".

Appliquée à un rayon lumineux passant au voisinage du soleil la déflexion calculé en utilisant la mécanique générale est

$$(\delta\varphi)_S = 1{,}77''$$

Cette valeur est en très bon accord avec la valeur mesurée par Eddington pendant l'éclipse de soleil de 1919.

Les résultats des calculs de la précession du périhélie de Mercure et de la déflexion d'un rayon lumineux passant près du soleil ont constitué 2 tests importants de la validité de la relativité générale.

Stabilité des orbites circulaires

1. Rappel de la théorie de Newton

Section d'équation (suivante)

1.1. Equations de base

Une masse m_A située au point A exerce sur la masse m_B située au point B une force

$$\boxed{m_A \frac{d_2\overrightarrow{OA}}{dt^2} = -Gm_Am_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|^3}} \quad (1.1)$$

De même la masse m_A exerce sur la masse m_B

$$\boxed{m_B \frac{d_2\overrightarrow{OB}}{dt^2} = -Gm_Am_B \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|^3}} \quad (1.2)$$

1.2. Déplacement du centre de gravité

En additionnant les équations (1.1) et (1.2) et en remarquant que les 2 seconds membres sont opposés : $m_A \frac{d_2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + m_B \frac{d_2\overrightarrow{OB}}{dt^2} = \frac{d_2}{dt^2}\left(m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB}\right) = 0$

C étant le barycentre des masses m_A et m_B : $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{m_A + m_B}\left(m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB}\right)$,

l'équation précédente peut s'écrire

$$\boxed{\frac{d_2\overrightarrow{OC}}{dt^2} = 0} \quad (1.3)$$

L'accélération du centre de gravité des 2 masses est nulle. Il se déplace en ligne droite.

1.3. Mouvement d'une mase par rapport à l'autre

En divisant l'équation (1.1) par m_A et l'équation (1.2) par m_B et en soustrayant la première équation de la deuxième :

$$\frac{d_2\overrightarrow{OB}}{dt^2} - \frac{d_2\overrightarrow{OA}}{dt^2} = -Gm_A \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^3} + Gm_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^3}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\frac{d_2\overrightarrow{AB}}{dt^2} = -G\left(m_A + m_B\right) \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^3}} \quad (1.4)$$

En posant $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$, l'équation (1.4) devient

$$\frac{d_2\vec{r}}{dt^2} = -\left(m_A + m_B\right)\frac{1}{r^2}\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \tag{1.5}$$

$\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ est le vecteur unitaire $\vec{u}_{AB}$ orienté de A vers B.

Remarque :

Si la masse $m_B = m$ est "petite" devant la masse $m_A = M$,par exemple la masse de la terre devant la masse du soleil, la masse m_B peut être négligée dans l'équation (1.5). Elle devient

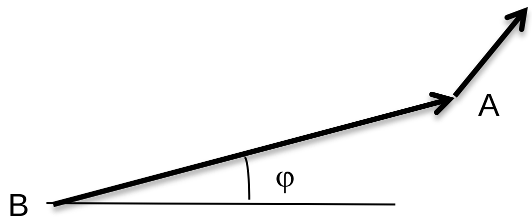
$$\boxed{\frac{d_2\vec{r}}{dt^2} = -GM\frac{1}{r^2}\vec{u}_{AB}} \tag{1.6}$$

1.4. Constantes du mouvement

1.4.1. Moment cinétique

Le moment cinétique de la masse m par rapport au point B est $\overrightarrow{\mathscr{M}} = m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$ et

$\frac{d\overrightarrow{\mathscr{M}}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \wedge \frac{d_2\vec{r}}{dt^2}\right)$. Les 2 termes du second membre sont nuls, le premier parce c'est le produit vectoriel de 2 vecteurs égaux et le second parce que l'accélération est colinéaire au vecteur $\vec{r}$. Le moment $\overrightarrow{\mathscr{M}}$ est constant. Ceci montre par ailleurs que le mouvement est situé dans un plan, le plan perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{\mathscr{M}}$.



En posant $\vec{u} = \vec{u}_{AB}$ et $\vec{u}_1$ le vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$ et situé dans le plan de la trajectoire : $\vec{u}_1 = \frac{d}{d\varphi}\vec{u}$. Avec $\vec{r} = r\vec{u}$ et

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\vec{u}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\vec{u}_1\frac{d\varphi}{dt} \tag{1.7}$$

le moment cinétique $\overrightarrow{\mathscr{M}} = m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = mr\vec{u} \wedge \left(\frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_1\right)$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}} = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \vec{u} \wedge \vec{u}_1} \tag{1.8}$$

C'est la deuxième loi de Kepler.

1.4.2. Energie

En faisant le produit scalaire par $\frac{d\vec{r}}{dt}$ des 2 membres de l'équation (1.6)

$$\frac{d_2\vec{r}}{dt^2} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = -GM \frac{1}{r^2} \vec{u}_{AB} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = -GM \frac{1}{r^2} \vec{u} \bullet \left(\frac{dr}{dt} \vec{u} + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_1 \right) \text{, il reste}$$

$$\frac{d_2\vec{r}}{dt^2} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} + GM \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = 0$$

C'est à dire

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} \right] = 0$$

et, en multipliant par m

$$\boxed{\frac{1}{2} m\vec{v}^2 - \frac{GMm}{r} = C^{te} = K} \tag{1.9}$$

Le premier terme est l'énergie cinétique et le second terme l'énergie potentielle.

D'après (1.7) $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$ (les dérivées par rapport au temps sont indiquées patr point au-dessus de la variable). L'équation (1.9) devient

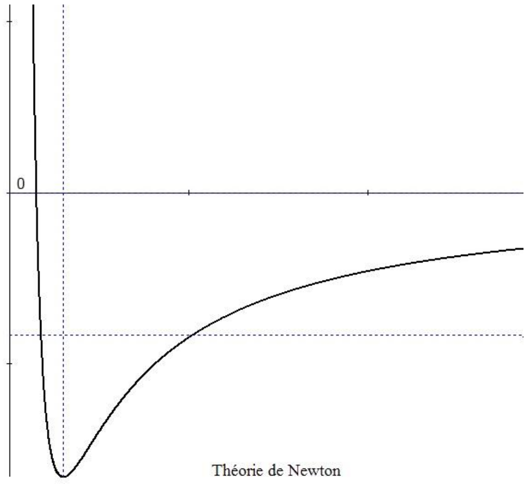
$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{GMm}{r} = K$$

Le carré du moment cinétique $\left(\overrightarrow{\mathscr{M}} \right)^2 = \mathscr{M}^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2$, soit $r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\mathscr{M}^2}{m^2 r^2}$. L'équation(1.9) devient

$$\boxed{\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathscr{M}^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r} = K} \tag{1.10}$$

Les trajectoires sont des coniques. Les sommets de l'axe principal de la conique correspondent aux points où le rayon passe par un extremum : $\dot{r} = 0$ soit

$$\frac{1}{2}\frac{\mathscr{M}^2}{mr^2}-\frac{GMm}{r}=K$$



Théorie de Newton

Pour une valeur donnée de $\mathscr{M}$, la courbe représentative de $f(r)=\frac{1}{2}\frac{\mathscr{M}^2}{mr^2}-\frac{GMm}{r}$ est représentée ci-contre. Pour une valeur donnée de K il y a 2 points (ellipse), un point double (cercle) ou un seul point (parabole ou hyperbole).

Le cercle correspond au minimum de la courbe, lorsque que la dérivée s'annule : soit

$$\boxed{r_C=\frac{\mathscr{M}^2}{GMm^2}} \tag{1.11}$$

Quelle que soit la valeur de $\mathscr{M}$ il y a toujours une trajectoire circulaire stable possible. Cette trajectoire est stable parce qu'elle correspond au minimum de l'énergie K.

2. Relativité générale

Section d'équation (suivante)

Avec $u=\frac{1}{r}$, l'équation des géodésiques est

$$\boxed{u''+u=\frac{r_0}{2B^2}+\frac{3}{2}r_0u^2} \tag{2.1}$$

Si la géodésique est un cercle $u'=u''=0$ et

$$\frac{r_0}{2B^2}=u-\frac{3}{2}r_0u^2$$

2.1. Première limitation

La valeur de B^2 tirée de l'équation précédente :

$$\boxed{B^2=\frac{r_0r^2}{2\left(r-\frac{3}{2}r_0\right)}} \tag{2.2}$$

Ce qui implique, B^2 étant positif, que

$$\boxed{r>\frac{3}{2}r_0} \tag{2.3}$$

Il ne peut pas y avoir de trajectoire circulaire dont le "rayon" soit inférieur à $\frac{3}{2}r_0$.

2.2. Deuxième limitation

La métrique de Schwarzschild

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}dr^2 - r^2 d\varphi^2 \tag{2.4}$$

Le temps propre d'un observateur lié à la particule en mouvement est $cd\tau = ds$. En dérivant par rapport à ce temps propre :

$$\boxed{c^2 = \left(1-\frac{r_0}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2} \tag{2.5}$$

Par ailleurs, il a été montré que, pour une géodésique donnée,

$$\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\dot{t} = A \text{ et } r^2\dot{\varphi} = B$$

L'équation (2.5) devient, en remplaçant $\dot{t}$ et $\dot{\varphi}$

$$\boxed{\dot{r}^2 - c^2\frac{r_0}{r} + \frac{B^2}{r^2} - \frac{B^2 r_0}{r^3} = c^2\left(A^2-1\right)} \tag{2.6}$$

Pour une trajectoire circulaire $\dot{r} = 0$ et la valeur de son "rayon" r correspond à une racine double de l'équation

$$-c^2\frac{r_0}{r} + \frac{B^2}{r^2} - \frac{B^2 r_0}{r^3} = c^2\left(A^2-1\right)$$

ou encore à un extrémum de la courbe

$$f(r) = -c^2\frac{r_0}{r} + \frac{B^2}{r^2} - \frac{B^2 r_0}{r^3}$$

En posant $\rho = \frac{r}{r_0}$ et en divisant par c^2, $f(r)$ devient

$$g(\rho) = -\frac{1}{\rho} + k\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^3}\right) \tag{2.7}$$

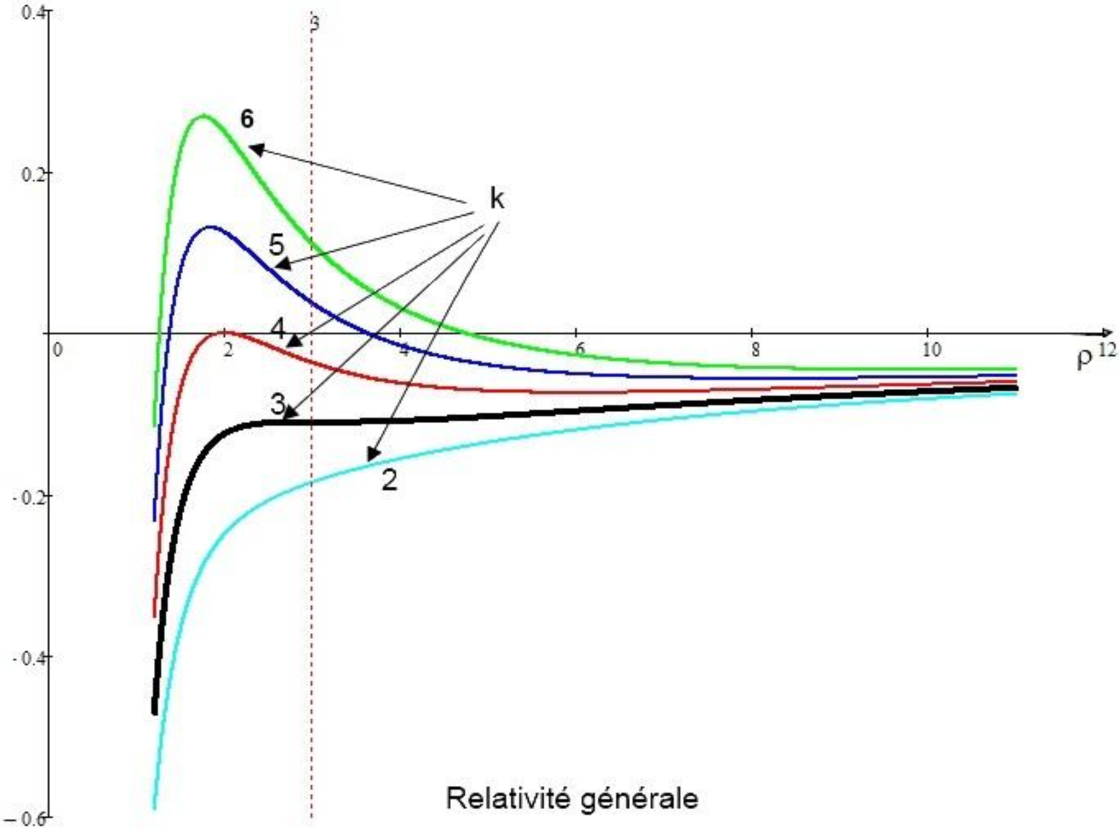
avec $k = \frac{B^2}{r_0^2 c^2}$

Dont la dérivée

$$g'(\rho) = \frac{1}{\rho^2} - 2k\frac{1}{\rho^3} + 3k\frac{1}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^4}\left(\rho^2 - 2k\rho + 3k\right)$$

s'annule pour

$$\boxed{\rho = k \mp \sqrt{k(k-3)}} \qquad (2.8)$$



Lorsque $k \rangle 3$, les courbes admettent un maximum et un minimum. La trajectoire stable correspond au minimum.

La valeur minimale de k pour laquelle il existe une trajectoire circulaire stable est $k = 3$ et la valeur correspondante du rayon est $\rho = 3$, c'est-à-dire

$$\boxed{r_{mini} = 3r_0} \qquad (2.9)$$

3. Disque d'accrétion, émission d'énergie

Section d'équation (suivante)

Le gaz en orbite circulaire autour de l'horizon d'un trou noir perd de son énergie à ,cause de la viscosité turbulente. Ceci s'accompagne d'une perte d'énergie gravitationnelle et d'un échauffement du gaz. Il perd de son moment angulaire et finit par quitter les orbites circulaires stables et tombe rapidement en spirale vers le centre du trou noir.

On peut estimer l'efficacité de l'émission d'énergie sous forme de rayonnement en calculant l'énergie perdue par une particule venant de "très loin" et se plaçant sur l'orbite circulaire la plus petite $r = 3r_0$.

Sur cette orbite $k = 3$, $B^2 = kr_0^2c^2 = 3r_0^2c^2$. En reportant ces valeurs dans l'équation (2.6), avec, de plus, $\dot{r} = 0$

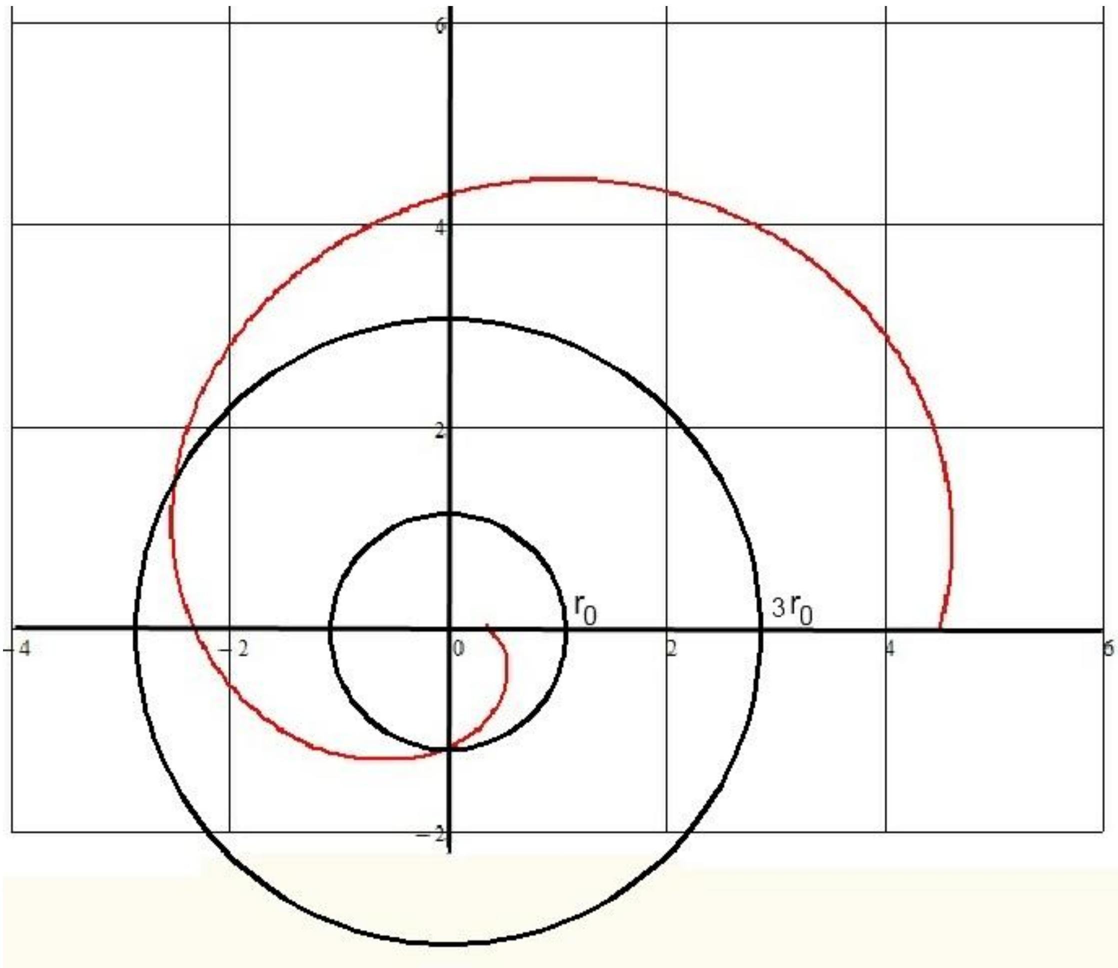
$$\dot{r}^2 - c^2\frac{r_0}{r} + \frac{B^2}{r^2} - \frac{B^2 r_0}{r^3} = c^2\left(A^2 - 1\right)$$

$$-c^2\frac{r_0}{3r_0} + \frac{3r_0^2c^2}{9r_0^2} - \frac{3r_0^3c^2}{27r_0^3} = c^2\left(A^2 - 1\right) \Rightarrow A^2 = \frac{8}{9}$$

Comme $A = \left(\dfrac{\text{Energie}}{m_0c^2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}943$

La partie d'énergie rayonnée est égale à $\left(1 - A\right)m_0c^2 \approx 0{,}057m_0c^2$. $5{,}7\%$ de l'énergie de masse a été transformée en rayonnement. Ce pourcentage est à comparer au pourcentage de $0{,}7\%$ de masse transformée en énergie dans la fusion nucléaire qui mène de l'hydrogène à l'hélium.

Ce rayonnement est très probablement l'explication des quasars.



Exemple de particule suivant une orbite pénétrant dans le trou noir $r < r_0$

4. Remarque

Section d'équation (suivante)

En dérivant l'équation (2.6) $\dot{r}^2 - c^2\frac{r_0}{r} + \frac{B^2}{r^2} - \frac{B^2 r_0}{r^3} = c^2\left(A^2 - 1\right)$:

$$\boxed{\frac{d_2 r}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(-c^2\frac{r_0}{r^2} + 2\frac{B^2}{r^3} - 3\frac{B^2 r_0}{r^4}\right)} \qquad (4.1)$$

Dans le second membre

- Le premier terme $-\frac{1}{2}c^2\frac{r_0}{r^2}$ est un terme d'attraction
- Le deuxième terme $+\frac{B^2}{r^3}$ est un terme équivalent à, une force ce,trifuge
- Le troisième terme $-\frac{3}{2}\frac{B^2 r_0}{r^4}$ est, comme le premier terme un terme d'attraction.
  Ce terme n'existe pas dans la théorie de Newton.

La somme des 2 derniers termes $\frac{B^2}{r^3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_0}{r}\right)$ devient négative lorsque $r < \frac{3}{2}r_0$

Cela conduit alors à un effondrement rapide de la particule vers le centre d'attraction.

Extension de la métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild considérait une masse ponctuelle concentrée en un point. Une autre métrique présentant une symétrie sphérique est celle qui décrit un univers où la masse serait répartie, avec une symétrie sphérique à l'intérieur d'une sphère.

Dans les équations d'Einstein le second membre n'est plus nul, il est constitué par le tenseur Energie – Impulsion.

1. Mise en équations

Section d'équation (suivante)

La métrique a la même forme que la métrique de Schwarzschild

$$\boxed{ds^2 = c^2 e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)} \qquad (1.1)$$

1.1. Tenseur de Ricci

Les composantes du tenseur de Ricci sont les mêmes que celles de la métrique de Schwarzschild :

$$\boxed{R_{00} = e^{2(\nu-\lambda)}\left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right)} \qquad (1.2)$$

$$\boxed{R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}} \qquad (1.3)$$

$$\boxed{R_{22} = e^{-2\lambda}\left(1 + r\nu' - r\lambda'\right) - 1} \qquad (1.4)$$

$$\boxed{R_{33} = R_{22}\sin^2\theta} \qquad (1.5)$$

1.2. Tenseur Energie – Impulsion

Si $\rho(r)$ est la densité de matière, $p(r)$ la pression isotrope et u_μ les composante du vecteur quadri-vitesse, le tenseur énergie – impulsion s'écrit :

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}} \qquad (1.6)$$

La dérivation des variables x^μ est faite par rapport au temps local de la particule. Dans l'espace lié à la particule la métrique est la métrique de Minkowski :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2$$

La particule étant immobile, dans son référentiel, les dérivées

$$\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=0 \text{ si } \mu\neq 0$$

et $$\vec{u}^{2}=\frac{ds^{2}}{d\tau^{2}}=c^{2}$$

Le carré du quadrivecteur vitesse est égale à c^2.

Dans un autre système de coordonnées le module du quadrivecteur vitesse est conservé. Seule la composante $v^0 \neq 0$. Si la métrique est

$$ds^{2}=g_{00}dt^{2}+g_{0\alpha}dx^{0}dx^{\alpha}+g_{\alpha\beta}dx^{a}dx^{\beta} \quad \text{avec } \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$$

Et $c^{2}=g_{00}\left(v^{0}\right)^{2}$, c'est-à-dire $u^{0}=\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$ et $u_{0}=g_{00}u^{0}=g_{00}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$

$$\boxed{u^{0}=c\sqrt{g_{00}}} \qquad (1.7)$$

Les autres composantes du quadrivecteur vitesse sont nulles.

$$\boxed{u^{\mu}=c\sqrt{g_{00}}\left[1,0,0,0\right]}$$

1.3. Equations d'Einstein

Une première forme d'écriture est

$$\boxed{R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\kappa T_{\mu\nu}} \qquad (1.8)$$

avec $\kappa=\frac{8\pi G}{c^{4}}$

En multipliant les deux membres par $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R=-\kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

Sachant que $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=R,\ g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=4$ et $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}=T$, l'équation ci-dessus devient

$$-R=-\kappa T$$

En remplaçant R par κT dans l'équation(1.8) : $R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\kappa T=-\kappa T_{\mu\nu}$

$$\boxed{R_{\mu\nu}=-\kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)} \qquad (1.9)$$

En reprenant la valeur de $T_{\mu\nu}$ dans l'équation (1.6)

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}\right]$$

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = u^\nu u_\nu = \vec{u}^2 = c^2, \text{ et } g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4 \text{ et } T = \left(p + \frac{\rho}{c^2}\right) c^2 - 4p$$

$$\boxed{T = \rho c^2 - 3p} \qquad (1.10)$$

Les équations d'Einstein peuvent s'écrire :

$$\boxed{R_{\mu\nu} = -\kappa\left[\left(p + \frac{\rho}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - \frac{1}{2}\left(\rho c^2 - p\right) g_{\mu\nu}\right]} \qquad (1.11)$$

Le produit $u_\mu u_\nu$ n'est différent de zéro que lorsque $\mu = \nu = 0$, $u_0 u_0 = g_{00} c^2$

$$R_{00} = -\kappa\left[g_{00} c^2 \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) - \frac{1}{2} g_{00}\left(\rho c^2 - p\right)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 + 3p\right] g_{00} = -\frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 + 3p\right] c^2 e^{2\nu}\\
R_{11} &= \frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 - p\right] g_{11} = -\frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 - p\right] e^{2\lambda}\\
R_{22} &= \frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 - p\right] g_{22} = -\frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 - p\right] r^2\\
R_{33} &= R_{22} \sin^2\theta
\end{aligned}} \qquad (1.12)$$

Et les équations différentielles :

$$e^{2(\cancel{\nu}-\lambda)}\left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right) = -\frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 + 3p\right] c^2 \cancel{e}^{2\nu} \qquad (1.13)$$

$$-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} = -\frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 + 3p\right] c^2 e^{2\lambda}$$

$$\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} = -\frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 - p\right] e^{2\lambda} \qquad (1.14)$$

$$e^{-2\lambda}\left(1 + r\nu' - r\lambda'\right) - 1 = -\frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2 - p\right] r^2 \qquad (1.15)$$

2. Solution

Section d'équation (suivante)

Des équations (1.12) on déduit :

$$\boxed{R_{00}\frac{e^{-2\nu}}{c^2}+R_{11}e^{-2\lambda}+2\frac{R_{22}}{r^2}=-2\kappa\rho c^2} \tag{2.1}$$

Des équations (1.13) à (1.15) on déduit

$$\boxed{\left(1-e^{-2\lambda}\right)+2r\lambda' e^{-2\lambda}=\kappa r^2\rho c^2} \tag{2.2}$$

qui peut s'écrire $\frac{d}{dr}\left[r\left(1-e^{-2\lambda}\right)\right]=\kappa\rho c^2 r^2$ et qui s'intègre

$$r\left(1-e^{-2\lambda}\right)=\kappa c^2\int_0^r\rho\left(x\right)x^2dx+C^{te}$$

Avec $\kappa=\frac{8\pi G}{c^4}$, le second membre s'écrit $\frac{2G}{c^2}\int_0^r 4\pi\rho(x)x^2dx+C^{te}$. En appelant

$$\boxed{m\left(r\right)=\int_0^r 4\pi\rho(x)x^2dx} \tag{2.3}$$

, le résultat $\left(r-re^{-2\lambda}\right)=\frac{2Gm(r)}{c^2}+C^{te}$ et $g_{11}=e^{2\lambda}=\frac{1}{1-\frac{2Gm(r)}{c^2r}+\frac{C^{te}}{r}}$. Afin que $g_{11}(0)\neq 0$ il faut prendre $C^{te}=0$

$$\boxed{g_{11}=\frac{1}{1-\frac{2Gm(r)}{c^2r}}} \tag{2.4}$$

Remarque

Pour calculer la masse comprise entre le centre et le rayon r il faudrait calculer l'intégrale

$$M(r)=\int_0^r\sqrt{\gamma(r)}drd\theta d\varphi$$

où γ est le module du déterminant du tenseur métrique de l'espace à 3 dimensions $\left(r,\theta,\varphi\right)$: $\gamma=\left|g_{11}g_{22}g_{33}\right|=e^{2\lambda}r^4\sin^2\theta$ et

$$M\left(r\right)=\left(\int_{x=0}^r e^{\lambda(x)}x^2\rho(x)dx\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{2\varphi}d\varphi\right)$$

$$\boxed{M\left(r\right)=\int_0^r 4\pi\rho(x)x^2e^{\lambda(x)}dx} \tag{2.5}$$

La composante $g_{00}=e^{2\nu}$ se calcule en exprimant que la divergence $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$.

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$$

Rappel de la formule de la divergence d'un tenseur d'ordre 2, 2 fois contravariant $A^{\mu\nu}$:

$$\boxed{A^{\mu\nu}{}_{:\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(A^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)_{,\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu}A^{\mu\sigma}} \tag{2.6}$$

Pour le tenseur Energie-Impulsion $T^{\mu\nu}{}_{:\mu} = \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu\right]_{:\mu} - \left(pg^{\mu\nu}\right)_{:\mu}$

Sachant que $g^{\mu\nu}{}_{:\mu} = 0$ et que la dérivée covariante d'une fonction se confond avec sa dérivée, le deuxième terme se simplifie.

$$\boxed{\left(pg^{\mu\nu}\right)_{:\mu} = g^{\mu\nu}p_{:\mu} = g^{\mu\nu}p_{,\mu}} \tag{2.7}$$

Le premier terme

$$\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu\right]_{:\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\sqrt{-g}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu\right] + \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\sigma$$

Seule la composante $u^0 = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$ est différente de zéro. Le seul terme non nul dans le crochet est obtenu lorsque $\mu = \nu = 0$: $\sqrt{-g}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^0 u^0 = \sqrt{-g}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{c^2}{g_{00}}$. Comme $\rho(r)$ et $p(r)$ ne dépendent pas du temps x^0. par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left[\sqrt{-g}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^0 u^0\right] = 0 \tag{2.8}$$

Ce premier terme du second membre est donc nul.

Parmi tous les termes de $\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\sigma$, seuls le terme pour lequel $\mu = \sigma = 0$ n'est pas nul

$$\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\sigma = \Gamma^{\nu}{}_{00}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\left(u^0\right)^2 = \Gamma^{\nu}{}_{00}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{c^2}{g_{00}} = \frac{1}{g_{00}}\Gamma^{\nu}{}_{00}\left(\rho c^2 + p\right)$$

Le symbole de Christoffel $\Gamma^{\nu}{}_{00} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu 00} = g^{\mu\nu}\frac{1}{2}\left(g_{\mu 0,0} - g_{00,\mu} + g_{0\mu,0}\right) = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{00,\mu}$.

La nullité de la divergence du tenseur impulsion-énergie peut être réécrite, en changeant les signes :

$$\boxed{\frac{1}{2g_{00}}\left(\rho c^2+p\right)g^{\mu\nu}g_{00,\mu}+g^{\mu\nu}p_{,\mu}=0} \tag{2.9}$$

g_{00} et p ne dépendent que de $x^1=r$ et donc $g^{\mu\nu}g_{00,\mu}=g^{1\nu}\frac{\partial}{\partial x^1}g_{00}=g^{11}\frac{\partial}{\partial x^1}g_{00}$. Et de même $g^{\mu\nu}p_{,\mu}=g^{11}\frac{\partial}{\partial r}p$. L'équation (2.9) devient

$$\frac{\rho c^2+p}{2g_{00}}\frac{dg_{00}}{dr}+\frac{dp}{dr}=0$$

Et finalement comme $g_{00}=c^2e^{2\nu}$, $\frac{d}{dr}g_{00}=2c^2e^{2\nu}\nu'$ et $\frac{1}{2g_{00}}\frac{d}{dr}g_{00}=\nu'$.

$$\boxed{\nu'=-\frac{p'}{\rho c^2+p}} \tag{2.10}$$

Pour achever la détermination de la métrique, il faudrait connaitre les fonctions $p(r)$ et $\rho(r)$.

3. Equations relativiste de l'intérieur de l'étoile

Section d'équation (suivante)

La première équation découle de l'équation (2.3) $m(r)=\int_0^r 4\pi\rho(x)x^2dx$

$$\boxed{\frac{dm(r)}{dr}=4\pi\rho(r)r^2} \tag{3.1}$$

En reprenant l'équation (1.15) $e^{-2\lambda}\left(1+r\nu'-r\lambda'\right)-1=-\frac{1}{2}\kappa\left[\rho c^2-p\right]r^2$ et en utilisant les valeurs trouvées pour λ et ν :

$$e^{-2\lambda}=\left(1-\frac{2Gm(r)}{c^2r}\right),\quad \nu'=-\frac{p'}{\rho c^2+p}$$

et de (2.2) $\left(1-e^{-2\lambda}\right)+2r\lambda'e^{-2\lambda}=\kappa r^2\rho c^2\rightarrow$

$$r\lambda'e^{-2\lambda}=\frac{4\pi G}{c^4}\rho c^2r^2-\frac{Gm(r)}{c^2r}$$

il vient

$$\boxed{\frac{dp}{dr}=-\frac{\rho c^2+p}{r}\frac{1}{1-\frac{2Gm(r)}{c^2r}}\left(\frac{4\pi G}{c^4}pr^2+\frac{Gm(r)}{c^2r}\right)} \tag{3.2}$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation ***d'Oppenheimer-Volkoff***[1].

Pour résoudre totalement il faut une dernière relation, l'équation d'état de la matière :

$$\boxed{p = p(\rho)} \tag{3.3}$$

Les 3 équations (3.1) à (3.3) forment un système fermé. Il y a 2 équations différentielles du premier ordre, il faut 2 conditions pour résoudre.

La première est triviale : $m(0) = 0$.

La deuxième condition est obtenue en écrivant qu'à la surface de l'étoile ($r = R$), la pression est nulle.

Si on fait tendre $c \to \infty$, l'équation (3.2) devient

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

qui est l'équation newtonienne de l'hydrostatique.

4. Solution de Schwarzschild à densité constante

Section d'équation (suivante)

4.1. Détermination de la pression

Le problème se simplifie considérablement en choisissant

$$\boxed{\rho(r) = C^{te} = \rho} \tag{4.1}$$

Si R est le rayon de l'étoile :

$$\boxed{m(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho r^3 & \text{si } r \le R \\ \frac{4}{3}\pi\rho R^3 & \text{si } r > R \end{cases}}$$

L'équation (3.2) devient

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{4\pi G}{3c^4}\left(\rho c^2 + p\right)\left(\rho c^2 + 3p\right)\frac{r}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho r^2}} \tag{4.2}$$

Cette équation différentielle est "à variables séparées" :

$$\frac{dp}{\left(\rho c^2 + p\right)\left(\rho c^2 + 3p\right)} = -\frac{4\pi G}{3c^4}\frac{rdr}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho r^2}$$

---

[1] On massive Neutron Cores – J.R. OPPENHEIMER & G. M. VOLKOFF (Physical Revew february 15, 1939)

et s'intègre :

$$\int_{p0}^{p(r)} \frac{dx}{\left(\rho c^2 + x\right)\left(\rho c^2 + 3x\right)} = -\frac{4\pi G}{3c^4}\int_0^r \frac{ydy}{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho y^2}$$

$p0 = p(0)$ est la pression au centre de l'étoile. Les 2 intégrales sont classiques :

$$\boxed{\frac{\rho c^2 + 3p}{\rho c^2 + p} = \frac{\rho c^2 + 3p_0}{\rho c^2 + p_0}\sqrt{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho r^2}} \tag{4.3}$$

La pression p_0 est déterminée en écrivant qu'à la surface de l'étoile ($r = R$) la pression est nulle. Le premier membre de l'équation (4.3) est égal à 1 et

$$1 = \left(\frac{\rho c^2 + 3p_0}{\rho c^2 + p_0}\right)\sqrt{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho R^2}$$

Ce qui permet de déterminer p_0, en remarquant que

$$\left(\frac{8\pi G}{3c^2}\rho R^2\right) = 2\frac{G}{c^2}\left(\frac{4}{3}\pi\rho R^3\right)\frac{1}{R} = \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{r_s}{r}$$

$$\boxed{p_0 = \rho c^2\,\frac{1-\sqrt{1-r_s/R}}{3\left(\sqrt{1-r_s/R}\right)-1}} \tag{4.4}$$

En introduisant cette valeur dans l'équation (4.3)

$$\boxed{p(r) = \rho c^2\,\frac{\sqrt{1-r_s r^2/R^3}-\sqrt{1-r_s/R}}{3\left(\sqrt{1-r_s/R}\right)-\sqrt{1-r_s r^2/R^3}}} \tag{4.5}$$

4.2. Métrique

La composante g_{11} donnée par l'équation (2.4) $g_{11} = \dfrac{1}{1-\dfrac{2Gm(r)}{c^2 r}}$ est complètement

déterminée : $m(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho = \left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho\right)\dfrac{r^3}{R^3} = M\dfrac{r^3}{R^3}$ et

$$\boxed{\begin{aligned} g_{11}(r) &= \frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2}\frac{r^2}{R^3}} = \frac{1}{1-\frac{r_s r^2}{R^3}} && \text{si } r \le R \\ &= \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} && \text{si r} \ge \text{R} \end{aligned}} \tag{4.6}$$

En reprenant l'équation(2.10) $\nu' = -\dfrac{p'}{\rho c^2 + p}$, comme ρ est une constante

$d\nu = -\dfrac{dp}{\rho c^2 + p}$ et $\nu(r) = -\displaystyle\int \dfrac{dp}{\rho c^2 + p} = -\ln\left(\rho c^2 + p\right) + C^{te} = \ln\dfrac{K}{\rho c^2 + p(r)}$, K étant une constante d'intégration.et

$$g_{00} = e^{2\nu} = \frac{K^2}{\left[\rho c^2 + p(r)\right]^2}$$

En reprenant $p\left(r\right)$ dans l'équation (4.5)

$$\rho c^2 + p = \rho c^2\left[1 + \frac{\sqrt{1 - r_s r^2/R^3} - \sqrt{1 - r_s/R}}{3\left(\sqrt{1 - r_s/R}\right) - \sqrt{1 - r_s r^2/R^3}}\right]$$

$$= \rho c^2\left[\frac{2\left(\sqrt{1 - r_s/R}\right)}{3\left(\sqrt{1 - r_s/R}\right) - \sqrt{1 - r_s r^2/R^3}}\right]$$

La composante

$$\boxed{\begin{aligned} g_{00}(r) &= \frac{K^2}{\left[\rho c^2 + p\left(r\right)\right]^2} \\ &= \frac{K^2}{\left(2\rho c^2\right)^2\left(1 - r_s/R\right)}\left[3\left(\sqrt{1 - r_s/R}\right) - \sqrt{1 - r_s r^2/R^3}\right]^2 \\ &= K'\left[3\left(\sqrt{1 - r_s/R}\right) - \sqrt{1 - r_s r^2/R^3}\right]^2 \end{aligned}} \qquad (4.7)$$

La constante d'intégration $K' = \dfrac{K^2}{\left(2\rho c^2\right)^2\left(1 - r_s/R\right)}$ est déterminée en écrivant que

$r = R \rightarrow g_{00} = c^2\left(1 - \dfrac{r_s}{R}\right)$. Dans (4.7) $g_{00}\left(R\right) = K'\left[4\left(1 - \dfrac{r_s}{R}\right)\right]$ et donc

$$K' = \frac{c^2}{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} g_{00} &= \frac{c^2}{4}\left[3\left(\sqrt{1 - r_s/R}\right) - \sqrt{1 - r_s r^2/R^3}\right]^2 && \text{si } r \le R \\ &= c^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) && \text{si } r \ge R \end{aligned}} \qquad (4.8)$$

4.3. Théorème de Buchdahl

Dans l'équation (4.4) le dénominateur s'annule si $\sqrt{1-r_s/R} = \frac{1}{3}$ et la pression p_0 devient infinie.

Il faut donc $1-\frac{r_s}{R} > \frac{1}{9}$ soit $1-\frac{2GM}{c^2R} > \frac{1}{9}$

$$\boxed{\frac{GM}{c^2R} < \frac{4}{9}} \qquad (4.9)$$

Ce résultat peut s'interpréter en disant que pour un rayon R, si la masse de l'étoile dépasse la limite $M < \frac{4c^2R}{9G}$, il n'y a plus d'équilibre possible et l'étoile va s'effondrer.

Il faut toutefois spécifier que cette limite ne s'applique que si la densité ρ est constante. Elle ne s'applique donc pas à une étoile ordinaire telle que le soleil.

Elle pourrait s'appliquer, à peu près, pour une étoile à neutrons. En prenant une étoile à neutrons d'un rayon $R = 10$ km elle ne peut pas avoir une masse supérieure à

$$M < \frac{4c^2R}{9G} = \frac{4\left(3\times10^8\right)^2 10^4}{9\times6,674\times10^{-11}} \approx 6\times10^{30} \text{ kg}$$

C'est-à-dire 3 fois la masse du soleil. Ce qui est l'ordre de grandeur des masses mesurées.