

9

L'hypothèse des trous noirs

Préambule

En 1784, devant l'auditoire de la Royal Society de Cambridge, le révérend John Michell, géologue et astronome amateur anglais suggéra *"que les particules de lumières étaient attirées de la même façon que les autres corps"*. A partir de cette hypothèse fondamentale, il formula pour la première fois le concept de trou noir : *"si disait-il, le demi grand-axe d'une sphère de même densité que le Soleil dépassait le rayon de celui-ci dans une proportion de 1 à 500, alors un corps, tombant d'une hauteur infinie vers lui, aurait acquis à sa surface une plus grande vitesse que celle de la lumière, et par conséquent, en supposant que la lumière soit attirée par la même force en proportion de sa force d'inertie, comme d'autres corps, toute la lumière émise par un tel corps y retournerait, par sa propre gravité"*. Il expliquait que malgré le fait que ces corps étaient invisibles, ils devaient provoquer des effets gravitationnels décelables : *"s'il arrivait que quelque autre corps lumineux tourne autour d'eux, des mouvements de ces corps tournants, nous pourrions peut-être encore déduire l'existence du corps central avec quelque degré de probabilité; cela pourrait aussi bien nous apporter une indication concernant quelques unes des irrégularités des corps tournants, qui ne serait pas aisément explicable par aucune autre hypothèse"*. Mais la thèse de Michell restait trop abstraite et ne recevra aucun écho. Il faudra attendre 1796 pour que le marquis Pierre Simon de Laplace, mathématicien, philosophe et astronome passionné par la mécanique céleste et la gravitation redécouvre cette idée. Il écrivait dans son *Exposition du Système du Monde* : *"Un astre lumineux, de la même densité que la Terre, et dont le diamètre serait 250 fois plus grand que le Soleil, ne permettrait, en vertu de son attraction, à aucun de ses rayons de parvenir jusqu'à nous. Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l'univers puissent, par cette cause, être invisibles"*. Il présentera sa thèse devant l'auditoire de l'Académie des Sciences mais ceux-ci resteront sceptiques sur les chances d'existence d'un tel objet. Ainsi naquit le concept du trou noir mais la démonstration mathématique de Laplace semblait fantaisiste aux yeux des astronomes.

Robert Oppenheimer et Hartland Snyder démontrèrent l'existence des singularités en 1939, concluant : *"Quand toutes les sources d'énergies thermonucléaires seront épuisées, une étoile suffisamment massive s'effondrera"*, c'est le trou noir de Schwarzschild.

C'est finalement le physicien John Wheeler de l'Université de Princeton qui, en 1967 dénomma "trou noir" une telle singularité et l'enveloppe qui l'entoure. Les français auraient bien aimé l'appeler "astre occlus" en hommage à Laplace, mais le terme anglais traduit bien le caractère mystérieux qui recouvre cette entité. Elle est à la fois cachée à nos regards au sens strict et a un grand impact d'un point de vue psychologique.

(Extrait de "Le trou noir" par Thierry LOMBRY)

1 – Métrique de Schwarzschild extérieure

1.1 – Première version

La métrique de Schwarzschild extérieure

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (9.1.1)$$

Avec $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$

Présente à première vue une singularité si $r = r_0$. C'est l'abbé Lemaître qui pensa que cette singularité n'était due qu'au choix des coordonnées.

Exemple d'un "mauvais" choix de coordonnées :

L'équation de la surface d'une sphère de rayon a , en coordonnées orthonormées est $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. L'élément de longueur est $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Comme $z^2 = a^2 - (x^2 + y^2)$, $2zdz = -2(xdx + ydy)$ et $dz^2 = (xdx + ydy)^2 / z^2 = (xdx + ydy)^2 / (a^2 - (x^2 + y^2))$. L'élément de longueur devient $ds^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}$.

En posant $x = \rho \cos \varphi$ et $y = \rho \sin \varphi$,

$(xdx + ydy) = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = \rho d\rho$ et $(dx^2 + dy^2) = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$, l'élément de

longueur s'écrit avec ces nouvelles variables $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \frac{\rho^2 d\rho^2}{a^2 - \rho^2}$

$$ds^2 = \frac{a^2}{a^2 - \rho^2} d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

Il y a apparemment une singularité lorsque $\rho = a$, alors qu'il n'y a aucune singularité sur la surface de la sphère.

Ce paradoxe disparaît avec un nouveau changement de variable :

$\rho = a \sin \theta$.

1.2 Changement de variables

Le changement de variables proposé est :

$$c\tau = ct + f(r), \quad \rho = ct + g(r) \Rightarrow \rho - c\tau = g(r) - f(r) \tag{9.1.2}$$

En calculant

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 - \frac{r_0}{r} d\rho^2 &= (dct + f'(r) dr)^2 - \frac{r_0}{r} (dct + g'(r) dr)^2 \\ &= \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 + 2 \left(f'(r) - \frac{r_0}{r} g'(r)\right) dr dt + \left(f'^2(r) - \frac{2M}{r} g'^2(r)\right) dr^2 \end{aligned}$$

En choisissant les fonctions $f(r)$ et $g(r)$ telles que

$$f'(r) = \frac{r_0}{r} g'(r) \tag{9.1.3}$$

il reste
$$c^2 d\tau^2 - \frac{r_0}{r} d\rho^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(f'^2(r) - \frac{r_0}{r} g'^2(r)\right) dr^2$$

En choisissant maintenant

$$f'^2(r) - \frac{r_0}{r} g'^2(r) = -\frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} \tag{9.1.4}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{c^2 d\tau^2 - \frac{r_0}{r} d\rho^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}}} \tag{9.1.5}$$

1.3 – Solution – nouvelle métrique

Les équations (9.1.3) et (9.1.4) permettent de déterminer les fonctions $f(r)$ et $g(r)$. En élevant la première au carré et en soustrayant la seconde :

$$\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{r_0}{r}\right] g'^2(r) = -\frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}$$

Soit

$$g'(r) = \sqrt{\frac{r}{r_0}} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)^2}} \tag{9.1.6}$$

Il faut se rappeler que $\sqrt{a^2} = |a|$ et donc que $\sqrt{\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)^2} = \left|\frac{r_0}{r} - 1\right|$

Si $r > r_0$ $g'(r) = \frac{dg}{dr} = \sqrt{\frac{r}{r_0}} \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}$ et $g = \int \sqrt{\frac{r}{r_0}} \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} dr$

En posant $y = \sqrt{\frac{r}{r_0}} \Rightarrow r = r_0 y^2$ et $dr = 2r_0 y dy$ on trouve, à une constante additive

près :

----- 9 Hypothèse des trous noirs -----

$$g(r) = 2r_0 \left[\frac{y^3}{3} + y - \frac{1}{2} \text{Log} \frac{y+1}{y-1} \right] \quad (9.1.7)$$

Et d'après (9.1.3) $g' - f' = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) g'$, et avec (9.1.6) $g' - f' = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \sqrt{\frac{r}{r_0}} \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}$

$$g' - f' = \frac{r^{1/2}}{r_0^{1/2}} \quad (9.1.8)$$

En intégrant $g - f = \rho - c\tau = \frac{1}{r_0^{1/2}} \frac{2}{3} r^{3/2}$ soit $r^{3/2} = r_0^{1/2} \frac{3}{2} (\rho - c\tau) = r_0^{3/2} \frac{3}{2} \left(\frac{\rho - c\tau}{r_0}\right)$ et

$$\frac{r}{r_0} = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\rho - c\tau}{r_0}\right) \right]^{2/3} \quad (9.1.9)$$

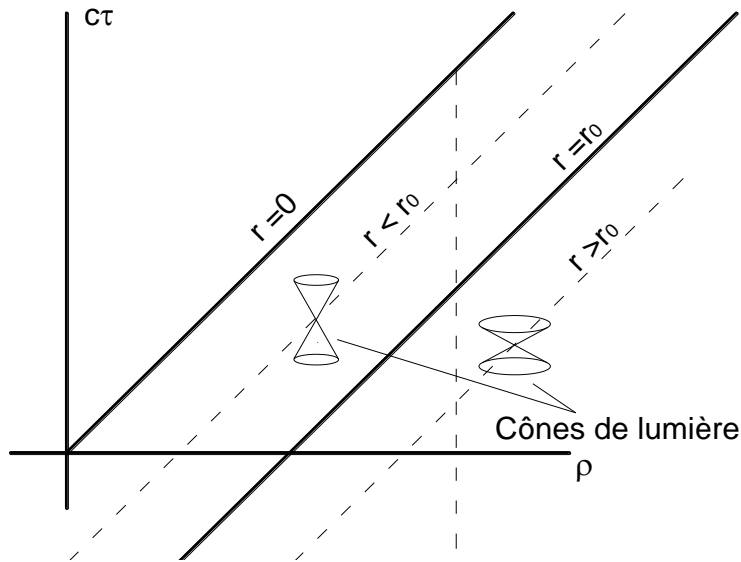
D'après (9.1.5) $ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{r_0}{r} d\rho^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$. Et d'après le résultat ci-dessus :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{1}{\left[\frac{3}{2} \frac{\rho - c\tau}{r_0}\right]^{2/3}} d\rho^2 - r_0^2 \left[\frac{3}{2} \frac{\rho - c\tau}{r_0}\right]^{4/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (9.1.10)$$

La singularité n'apparaît plus que si $(\rho - c\tau = 0)$, c'est-à-dire $r = 0$. Lorsque $r = r_0$ alors $\frac{3}{2} \left(\frac{\rho - c\tau}{r_0}\right) = 1$ et pour cette valeur de r : $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\rho^2 - r_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$.

La singularité mathématique a disparu.

Dans cette métrique toutes les horloges sont synchronisées !



Une particule immobile dans ce référentiel a une ligne d'univers $\rho = C^{te}$. Elle est représentée par une droite "verticale" dans le diagramme ci-dessus. Pendant un intervalle de temps τ fini les particules se précipitent vers le centre du champ ($r = 0$) qui est un point de singularité réel de la métrique.

2 – Propagation des rayons lumineux radiaux

Pour un rayon lumineux $ds^2 = 0$, s'ils sont radiaux $d\theta = 0$ et sans restreindre la généralité on supposera $\theta = 0$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{d\rho^2}{\left[\frac{3}{2} \frac{\rho - c\tau}{r_0} \right]^{2/3}} = 0$$

$$\text{Et } \frac{cd\tau}{d\rho} = \pm \left[\frac{3}{2} \frac{\rho - c\tau}{r_0} \right]^{-1/3} = \pm \sqrt{\frac{r_0}{r}}$$

$$\frac{cd\tau}{d\rho} = \pm \sqrt{\frac{r_0}{r}} \tag{9.2.1}$$

Les signes \pm correspondent aux 2 frontières du cône de lumière au point d'univers donné.

$$\begin{aligned} \left| \frac{cd\tau}{d\rho} \right| &> 1 \text{ si } r < r_0 \\ \left| \frac{cd\tau}{d\rho} \right| &< 1 \text{ si } r > r_0 \end{aligned} \tag{9.2.2}$$

3 – Ligne d'univers d'une particule

Si $r > r_0$, la ligne d'univers $r = C^{te}$ de pente 1, se trouve à l'intérieur du cône de lumière et la particule peut se déplacer dans différentes directions.

Si $r < r_0$, la ligne d'univers $r = C^{te}$, se trouve à l'extérieur du cône de lumière. La particule ne peut que se déplacer vers le centre $r = 0$

4 – Mouvement d'une particule en chute libre à l'extérieur du rayon de Schwarzschild

On suppose que la particule tombe avec un mouvement radial, c'est à dire $d\varphi = d\theta = 0$, les vitesses $v^2 = v^3 = 0$, ce sont les vitesses tangentielles.

Pour simplifier les calculs on prendra comme variable $x^0 = ct = \tau$. Ce qui change la valeur de g_{00} , pour les calculs qui suivent elle sera égale à $g_{00} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$

4.1 Géodésique :

La métrique avec $d\theta = d\varphi = 0$ se simplifie en

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}}} \quad (9.4.1)$$

Pour trouver la trajectoire de la particule il faut chercher l'extremum de l'intégrale

$$\int_{r_1}^{r_2} F(\dot{\tau}, \dot{r}) ds$$

$$F = \left(1 - r_0/r\right) \dot{\tau}^2 - \frac{1}{1 - r_0/r} \dot{r}^2$$

$\dot{\tau} = d\tau/ds$ et $\dot{r} = dr/ds$. Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\tau}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \tau} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial F}{\partial r} &= 0 \end{aligned}} \quad (9.4.2)$$

La variable τ n'apparaissant pas explicitement dans la fonction F il reste $\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\tau}} \right) = 0$

et donc $\frac{\partial F}{\partial \dot{\tau}} = C^{te} = 2k$, c'est-à-dire $\left(1 - r_0/r\right) \dot{\tau} = k$

$$\boxed{\dot{\tau} = \frac{k}{1 - r_0/r}} \quad (9.4.3)$$

----- 9 Hypothèse des trous noirs -----

Comme $\frac{ds^2}{ds^2} = F = 1 : 1 = (1 - r_0/r) \frac{k^2}{(1 - r_0/r)^2} - \frac{\dot{r}^2}{(1 - r_0/r)}$ et

$$\boxed{\dot{r} = -\sqrt{k^2 - (1 - r_0/r)}} \quad (9.4.4)$$

Le signe moins est choisi pour une particule "tombant" vers le centre, le rayon r est décroissant.

Si à l'instant initial la particule est immobile au point $r = r_i$, en ce point $\dot{r} = 0$ et $A^2 = (1 - r_0/r_i)$, $A = \sqrt{1 - r_0/r_i}$. Les équations deviennent

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{\sqrt{1 - r_0/r}}{1 - r_0/r} \\ \dot{r} &= -\sqrt{r_0/r - r_0/r_i} \end{aligned}} \quad (9.4.5)$$

4.2 "Temps de chute"

Ce qui permet d'exprimer r en fonction de τ : $\frac{d\tau}{dr} = \frac{d\tau/ds}{dr/ds} = \frac{\dot{\tau}}{\dot{r}}$

$$\boxed{dx^0 = cdt = d\tau = -k \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{r_i}}} dr} \quad (9.4.6)$$

Partant de $r = r_i$ pour atteindre $r = r_f < r_i$ le temps sera

$$T(r_i, r_f) = -\frac{1}{c} k \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \sqrt{\frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{r_i}}}$$

$$\boxed{T(r_i, r_f) = \frac{1}{c} k \sqrt{\frac{r_i}{r_0}} \int_{r_f}^{r_i} \frac{r \sqrt{r} dr}{(r - r_0) \sqrt{r_i - r}}} \quad (9.4.7)$$

Cette intégrale peut se calculer avec des fonctions élémentaires. Si on examine ce qui se passe lorsque r est proche de r_0 , $r = r_0 + h$

$$T(r_i, r_f) = T(r_i, r_1) + T(r_1, r_f) = C^{te} + \frac{1}{c} k \sqrt{\frac{r_i}{r_0}} \int_{r_f}^{r_1} \frac{r \sqrt{r} dr}{(r - r_0) \sqrt{r_i - r}} \approx C^{te} + K \int_{r_f}^{r_1} \frac{dr}{r - r_0}$$

$$\boxed{T(r_i, r_f) \approx C^{te} + K \int_{r_f}^{r_1} \frac{dr}{r - r_0}} \quad (9.4.8)$$

Cette intégrale diverge comme $\ln(r - r_0)$ lorsque $r \rightarrow r_0$.

4.3 Le temps des observateurs

L'équation (9.4.7) indique comment varie la variable $x^0 = ct$ pendant la chute de la particule. Mais comment varie le temps des observateurs ?

4.3.1 Observateur situé au loin

On suppose que l'observateur est situé en un point tel que $r_{ob} \gg r_0$, d'après ce qui a été vu dans le chapitre "Intervalle de temps", le temps propre de l'observateur fixe varie comme

$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0$. En reprenant la variation dx^0 dans (9.4.6), pour l'observateur, son temps

propre varie :
$$dt = -\frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r_{ob}}} \frac{k}{1 - \frac{r_0}{r}} \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{r_i}}} dr.$$

La seule différence avec (9.4.6) est le facteur constant $\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_{ob}}}$. Lorsque la particule s'approche du rayon de Schwarzschild r_0 le temps propre de l'observateur croît indéfiniment, d'autant plus vite que l'observateur est plus loin.

4.3.2 Observateur se déplaçant avec la particule.

Son temps propre est mesuré par $\frac{1}{c} ds$. Avec l'équation $\frac{dr}{ds} = v^1 = -\sqrt{\frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{r_i}}$, soit

$\frac{ds}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{r_i}}}$ le temps propre du voyageur varie comme

$$\boxed{dt = -\frac{1}{c} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{r_i}}}} \tag{9.4.9}$$

Cette intégrale a une limite finie lorsque $r \rightarrow r_0$.

Un calcul élémentaire (voir en annexe) donne un temps de chute observé par cette observateur :

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \frac{R}{2} (1 + \cos \psi) \\ T &= \frac{1}{c} \frac{R}{2} \sqrt{\frac{R}{r_0}} (\psi + \sin \psi) \end{aligned}}$$

Avec $R = r_i$, rayon initial et ψ tel que $r = \frac{R}{2} (1 + \cos \psi) = R \cos^2 \psi$ et donc

$$\psi = \text{Arccos} \sqrt{\frac{r}{R}}$$

Si $r_i \gg r_0$ alors $T_c \simeq \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{r_0 r_i}}{c}$

Le voyageur arrive donc en un temps limité sur la sphère de Schwarzschild. Il continue son voyage à l'intérieur du "trou noir".

Si le "voyage" continue le temps total pour atteindre le centre $r = 0$ est

$$T_t = \frac{\pi}{2} \frac{r_i}{c} \sqrt{\frac{r_i}{r_0}}$$

**Vitesse de chute mesurée par l'observateur se déplaçant avec la particule.
L'élément de longueur**

$$dl = \sqrt{-g_{11}} dr \text{ et la vitesse } v = \frac{\sqrt{-g_{11}}}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dr}{dt} \frac{v^2}{c^2} = \frac{-g_{11}}{g_{00}} \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2} \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2$$

en utilisant (9.4.6) et en remplaçant k par sa valeur $\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_i}}$, il vient

$$\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{r_i} \right) \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r_i}} \text{ et}$$

$$\boxed{1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{r_i}}} \quad (9.4.10)$$

Lorsque le "voyageur" s'approche de la sphère de Schwarzschild il mesure une vitesse de déplacement qui tend vers la vitesse de la lumière.

Au contraire pour un observateur fixe, sa vitesse tend vers zéro!!!!

4.3.3 Décalage vers le rouge

Une source lumineuse monochromatique de période T_1 située au point $r = r_1$. Quelle sera sa fréquence perçue au point situé en $r_2 > r_1$?

Au point situé en r_1 la variation de la variable x^0 correspondant au temps propre T_1 est

$$x^0 = c \frac{1}{\sqrt{g_{00}(r_1)}} T_1$$

Au point situé en r_2 , le temps propre correspondant à cette de x^0 sera

$$T_2 = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}(r_2)} x^0 = \sqrt{\frac{g_{00}(r_2)}{g_{00}(r_1)}} T_1$$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{r_2}}{1 - \frac{r_0}{r_1}}}}$$

(9.4.11)

$T_2 > T_1$. Il y a un glissement vers le rouge. Lorsque $r_1 \rightarrow r_0$, pour un observateur les phénomènes physiques observés au loin semblent se figer.

5 – Collapse gravitationnel d'une sphère de poussière

Dans le cas d'une symétrie centrale, on peut trouver une solution en négligeant la pression. En désignant par τ et R le temps et la coordonnée radiale.

5.1 Mise en équations d'une solution générale

On cherche une solution de la forme

$$\boxed{ds^2 = c^2 d\tau^2 - e^{\lambda(\tau,R)} dR^2 - r^2(\tau,R) d\Omega^2}$$

(9.5.1)

La quantité $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$.

Le référentiel est lié à la matière. A chaque particule de matière correspond une valeur déterminée de R . La fonction $r(\tau, R)$ décrit la loi du mouvement de la particule considérée.

r est une fonction de τ et de R . C'est un rayon tel que la longueur de la circonférence dont le centre est confondu avec l'origine soit $2\pi r$.

Pour tenir compte de la présence de la matière seule, l'équation d'Einstein de la relativité générale s'écrit

$$\boxed{R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{c^2} G \rho v_\mu v_\nu}$$

(9.5.2)

En écrivant $f' = \frac{df}{dR}$ et $\dot{f} = \frac{df}{dc\tau}$, les équations d'Einstein sont :

$$\begin{aligned} & -e^{-\lambda} r'^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0 & (1) \\ & -\frac{e^{-\lambda}}{r} (2r'' - r'\lambda') + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{r} + 2\frac{\ddot{r}}{r} = 0 & (2) \\ & -\frac{e^{-\lambda}}{r^2} (2rr'' + r'^2 - rr'\lambda') + \frac{1}{r^2} (r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1) = 8\pi \frac{G}{c^2} \rho & (3) \\ & 2\dot{r}' - \dot{\lambda}r' = 0 & (4) \end{aligned}$$

(9.5.3)

5.2 Solutions

La dernière équation s'intègre par $\lambda' = 2 \frac{\dot{r}'}{r'}$:

$$\frac{d\lambda}{dc\tau} = 2 \frac{d}{dc\tau} \ln r' + C(R) = \frac{d}{dc\tau} \ln r'^2 + C(R)$$

Et $e^\lambda = r'^2 e^{C(R)} = r'^2 A(R)$ qui peut aussi être écrit :

$$\boxed{e^\lambda = r'^2 \frac{1}{1+f(R)}} \quad (9.5.4)$$

$f(R)$ est une fonction arbitraire telle que $1+f(R) > 0$. En reportant dans la première équation de (9.5.3) :

$$-\frac{1+f(R)}{r'^2} r'^2 + 2r\ddot{r}' + \dot{r}'^2 + 1 = 0$$

$$\boxed{2r\ddot{r}' + \dot{r}'^2 = f(R)} \quad (9.5.5)$$

Cette équation s'intègre également en remarquant qu'en la multipliant par \dot{r}' et que $2r\dot{r}'\ddot{r}' + \dot{r}'^3 = \frac{\partial}{\partial c\tau}(r\dot{r}'^2)$. $\rightarrow \frac{\partial}{\partial c\tau}(r\dot{r}'^2) = r f(R)$, et intégrant par rapport à τ :

$$r\dot{r}'^2 = r f(R) + F(R)$$

Cette équation impose que lorsque $r = 0$, $F(0) = 0$

$$\boxed{\dot{r}'^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial c\tau}\right)^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}} \quad (9.5.6)$$

Ce qui permet de calculer τ : $\frac{\partial c\tau}{\partial r} = \varepsilon \sqrt{\frac{r}{rf+F}}$, $\varepsilon = \pm 1$

$c\tau = \varepsilon \int \sqrt{\frac{r}{rf+F}} dr$. En se souvenant que les fonctions f et F sont des fonctions de R , cette intégrale peut se transformer :

$$c\tau = \varepsilon \int \frac{1}{\sqrt{f}} \left(\frac{\frac{r}{f}}{\frac{r}{f} + \frac{F}{f}} \right) \frac{F}{f} d\left(\frac{f}{F}r\right) = \varepsilon \frac{F}{f} \int \frac{1}{\sqrt{f}} \left(\frac{\frac{r}{f}}{\frac{r}{f} + \frac{F}{f}} \right) d\left(\frac{f}{F}r\right)$$

$$\boxed{c\tau = \varepsilon \frac{F}{f} \int \frac{1}{\sqrt{f}} \left(\frac{\frac{r}{f}}{\frac{r}{f} + \frac{F}{f}} \right) d\left(\frac{f}{F}r\right)} \quad (9.5.7)$$

5.2.1 Cas $f > 0$

L'intégrale devient $c\tau = \varepsilon \frac{F}{f^{3/2}} \int \sqrt{\left(\frac{r \frac{f}{F}}{r \frac{f}{F} + 1}\right)} d\left(\frac{f}{F} r\right)$

Pour avoir $\tau > 0$ il faut $\varepsilon = 1$

Elle s'intègre en posant $r \frac{f}{F} = \text{sh}^2 v \Rightarrow d\left(r \frac{f}{F}\right) = 2 \text{sh} v \text{ch} v dv$ et $r \frac{F}{f} + 1 = \text{ch}^2 v$ et

$$c\tau = \frac{F}{f^{3/2}} \int 2 \text{sh}^2 v du = \left(v - \frac{1}{2} \text{sh} 2v\right) + C^{te} \text{ en posant } 2v = u$$

$$c\tau = \frac{F}{2f^{3/2}} (u - \text{sh} u) + c\tau_0(R)$$

$r = \frac{F}{2f} (\text{ch} u - 1)$ $c(\tau_0(R) - \tau) = \frac{F}{2f^{3/2}} (\text{sh} u - u)$

(9.5.8)

La fonction $\tau_0(R)$ est une "constante" d'intégration arbitraire.

5.2.2 Cas $f < 0$

On pose $f = -g$, avec $g(R) > 0$. L'équation (9.5.7) s'écrit

$$c\tau = \varepsilon \frac{F}{-g} \int \sqrt{\frac{1}{(-g)} \left(\frac{r \frac{-g}{F}}{r \frac{-g}{F} + 1}\right)} d\left(\frac{-g}{F} r\right) = \varepsilon \frac{F}{g} \int \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{r \frac{g}{F}}{1 - r \frac{g}{F}}\right)} d\left(\frac{g}{F} r\right)$$

Elle s'intègre en posant $\frac{g}{F} r = \sin^2 v \Rightarrow d\left(\frac{g}{F} r\right) = 2 \sin v \cos v dv$ et $1 - \frac{g}{F} r = \cos^2 v$

c'est-à-dire $r = \frac{F}{g} (1 - \cos^2 v) = \frac{F}{(-f)} \sin^2 v$

$$c\tau = \frac{F}{g^{3/2}} \int 2 \sin^2 v dv = \frac{F}{(-f)^{3/2}} \left(v - \frac{1}{2} \sin 2v\right) + \tau_0(R). \text{ En posant encore } 2v = u$$

$r = \frac{F}{-2f} (1 - \cos u)$ $c(\tau_0(R) - \tau) = \frac{F}{2(-f)^{3/2}} (u - \sin u)$

(9.5.9)

5.2.3 Cas $f = 0$

Dans ce cas l'équation (9.5.6) $\left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}$ se réduit à $\frac{\partial \tau}{\partial r} = \varepsilon \frac{1}{F^{1/2}} \sqrt{r}$

$$c\tau = \varepsilon \frac{1}{F^{1/2}} \int r^{1/2} dr = \varepsilon \frac{1}{F^{1/2}} \left[\frac{2}{3} r^{3/2} \right] + \tau_0(R)$$

$\frac{3}{2} F^{1/2} [\tau_0(R) - \tau] = -\varepsilon r^{3/2}$ en élevant au carré et en extrayant la racine cubique :

$$r = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} F^{1/3} [c\tau_0(R) - c\tau]^{2/3}$$

$$\boxed{r = \left(\frac{9}{4} F\right)^{1/3} [c\tau_0(R) - c\tau]^{2/3}} \quad (9.5.10)$$

5.2.4 Densité de matière

En reportant la valeur de $e^\lambda = r'^2 \frac{1}{1+f(R)}$ dans l'équation (3) de (9.5.3) et en utilisant

$\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}$ de (9.5.6) on démontre (voir en annexe) que

$$\boxed{8\pi \frac{G}{c^2} \rho = \frac{F'}{r'r^2} = 3 \frac{F'}{(r^3)'}} \quad (9.5.11)$$

5.3 Masse totale d'une sphère

L'élément de volume entre les rayons r et $r + dr$ est $4\pi r^2 dr$

$$M = 4\pi \int_0^{r(\tau, R_0)} \rho r^2 dr = 4\pi \int_0^{R_0} \rho r^2 r' dR$$

Comme $4\pi \rho r^2 r' = \frac{1}{2} \frac{F'}{G}$, $M = \frac{1}{2G} \int_0^{R_0} F' dR$

$$\boxed{M = \frac{F(R_0)}{\frac{2G}{c^2}}} \quad (9.5.12)$$

Ce qui donne également $F(R_0) = \frac{2GM}{c^2} = r_g$, r_g étant le rayon de Schwarzschild de la boule de matière de rayon $r(R_0, \tau)$

Si $F = C^{te} \neq 0 \Rightarrow F' = 0$, alors $\rho = 0$. On se trouve dans le cas étudié par Schwarzschild, mais avec une solution valable également à l'intérieur de la sphère de rayon r_g .

Le choix des fonctions f et F étant libre, si on choisit $F = r_g, f = 0$ et $\tau_0 = R$, on retrouve la métrique (9.1.10) :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{1}{\left[\frac{3}{2} \frac{\rho - c\tau}{r_0}\right]^{2/3}} d\rho^2 - r_0^2 \left[\frac{3}{2} \frac{\rho - c\tau}{r_0}\right]^{4/3} (d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2)$$

Voir démonstration en annexe. r_0 est remplacé par r_g et ρ par R .

5.4 Remarque sur les solutions

La solution générale dépend apparemment de 3 fonctions f, F , et τ_0 , mais la coordonnée R peut être soumise à une transformation arbitraire $R = R(R')$.

Si on donne des valeurs arbitraires à ces fonctions, à condition qu'elles soient comprises entre $R = 0$ et $R = R_0$, on obtient le mouvement de la sphère de ce rayon R_0 . Cette solution ne dépend pas des valeurs de ces fonctions pour $R > R_0$.

Dans tous les cas lorsque $\tau \rightarrow \tau_0(R)$, c'est à dire $[\tau_0(R) - \tau] \rightarrow 0$, le rayon $r \rightarrow 0$. La particule atteint le centre de la sphère. Si $\tau_0(R) = C^{te}$, toutes les particules arrivent en même temps au centre de la sphère. Toutes les distances radiales et toutes les distances circonférentielles tendent vers zéro.

Voir en annexe une solution donnant le référentiel permettant de décrire le champ créé par une masse ponctuelle, à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild.

5.5 Collapse de la sphère de poussière initialement au repos

5.5.1 Mise en équation

Il s'agit de choisir les fonctions $f(T), F(R)$ et $\tau_0(R)$.

La solution proposée par LANDAU est

$$\tau_0(R) = C^{te}, f = -\sin^2 R, F = 2a_0 \sin^3 R$$

En reportant ces valeurs dans la formule (9.5.9)

$$r = \frac{F}{-2f}(1 - \cos u), c(\tau_0(R) - \tau) = \frac{F}{2(-f)^{3/2}}(u - \sin u) :$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= a_0 \sin R(1 - \cos u) \\ c\tau - c\tau_0 &= a_0(u - \sin u) \end{aligned}} \tag{9.6.1}$$

La densité de matière $\rho = 3 \frac{c^2}{8\pi G} \frac{F'}{(r^3)'} = 3 \frac{c^2}{8\pi G} \frac{6a_0 \sin^2 R \cos R}{a_0^3 3 \sin^2 R \cos R (1 - \cos u)^2}$

----- 9 Hypothèse des trous noirs -----

$$\rho = \left(\frac{3c^2}{4\pi G} \right) \frac{1}{a_0^2 (1 - \cos u)^3} \quad (9.6.2)$$

Avec r donné par (9.6.1) et qui peut être écrit $r = a(\tau) \sin R$ car suivant la deuxième équation de (9.6.1) u est une fonction de la seule variable τ , la métrique

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - e^\lambda dR^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

peut s'écrire, avec $e^\lambda = \frac{r'^2}{1+f} = a^2(\tau)$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau) \left[dR^2 + \sin^2 R (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (9.6.3)$$

A un instant donné τ , c'est-à-dire pour une valeur donnée de u la densité de matière ne dépend pas de R . La densité de matière est la même en tout point.

Les valeurs de a_0 et τ_0 doivent être ajustées aux conditions initiales. A l'instant initiale,

la matière de la sphère est au repos : $\frac{dr}{cd\tau} = 0$, ce qui s'écrit pour une valeur de R donnée

d'après (9.6.1) : $\frac{dr}{cd\tau} = \sin R \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \sin R \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}}$

$$\frac{dr}{cd\tau} = \sin R \frac{\cos \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \quad (9.6.4)$$

La vitesse nulle correspond à $u = \pi$. L'instant où la particule atteint le centre, c'est-à-lorsque $r = 0$ correspond à $u = 2\pi$. Par commodité, on remplace u par $v = (u - \pi)$. Les équations (9.6.1) deviennent :

$$\begin{aligned} r &= a_0 \sin R (1 + \cos v) \\ c\tau - c\tau_0 &= a_0 (v + \sin v - \pi) \end{aligned} \quad (9.6.5)$$

L'instant $\tau = 0$ correspond $v = 0$: $-c\tau_0 = -a_0\pi$, les équations (9.6.5) deviennent

$$\begin{aligned} r &= a_0 \sin R (1 + \cos v) \\ c\tau &= a_0 (v + \sin v) \end{aligned} \quad (9.6.6)$$

A l'instant $\tau = 0, r(0, R) = r_0(R) : a_0 = \frac{r_0}{2 \sin R_0}$.

Le rayon de la sphère de Schwarzschild est $r_g = F(R_0) = 2a_0 \sin^3 R_0 = r_0 \sin^2 R_0$

5.5.2 Durée du collapse

La vitesse de chute est d'après (9.6.6) $\frac{dr}{dc\tau} = \sin R \frac{-\sin v}{1 + \cos v} = -\frac{1}{2} \sin R \operatorname{tg} \frac{v}{2}$. Lorsque le rayon tend vers 0, v tend vers π et les vitesses tendent vers l'infini!!!

Le centre est atteint lorsque $V = \pi$, $c\tau = a_0\pi$

$$\boxed{c\tau_f = \frac{\pi r_0}{2 \sin R_0}} \quad (9.6.7)$$

5.5.3 Un calcul d'application

La masse de la sphère de rayon r_0 est d'après (9.5.12)

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_0^3 = \frac{F(R_0)}{\frac{2G}{c^2}} = \frac{2a_0 \sin^3 R_0}{2G}$$

Le rayon de la sphère de Schwarzschild peut s'écrire de 2 façon :

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_0^3 \text{ et, suivant } r_g = F(R_0) = 2a_0 \sin^3 R_0 = r_0 \sin^2 R_0. \text{ De ces 2}$$

expression de r_g , il sort $\left(\frac{r_0}{\sin R_0}\right)^2 = \frac{3c^2}{8\pi G \rho_0}$. En reportant dans (9.6.7) :

$$\boxed{\tau_f = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3}{2\pi G \rho_0}}} \quad (9.6.8)$$

Cette formule peut se transformer, par exemple en fonction de r_0 et r_g :

$$\tau_f = \frac{\pi}{4} \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{r_g}}$$

Si le soleil était une boule de poussière avec $r_0 = 696000$ km et $r_g \approx 3$ km, le temps

de collapse serait $\tau_f = \frac{\pi}{4} \frac{696000}{300000} \sqrt{\frac{696000}{3}} = 877 \approx 14$ minutes 37 secondes.

Pour la Terre, $r_0 \approx 6366$ km et $r_g \approx 9,5\text{mm}=9,510^{-6}$ km $\rightarrow \tau_f \approx 431$ s = 7 mn 11s

5.5. Un paradoxe : le collapse dans la théorie de Newton

Voir le calcul en annexe.

Le paradoxe est que la méthode de Newton donne exactement le même résultat pour le temps de collapse.

Annexe

1 - calcul du temps de chute dans le référentiel de la particule

Le temps de chute est du rayon R au rayon $r_f < R$:

$$T_c = -\frac{1}{c} \int_{R_i}^{r_f} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_0 - r_0}{r} - \frac{r_0}{R}}} = \frac{1}{c} \int_{r_f}^{R_i} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_0 - r_0}{r} - \frac{r_0}{R}}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R}{r_0}} \int_{r_f}^R \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{R-r}} \quad (9.1.1)$$

En prenant comme variable $\sqrt{\frac{r}{R}} = \cos \varphi$, les limites d'intégration deviennent :

limite inférieure φ_0 telle que $\cos \varphi_f = \sqrt{\frac{r_f}{R}}$, limite supérieure $\sin \varphi_s = \sqrt{\frac{R}{R}} = 1$, $\varphi_s = 0$.

$r = R \cos^2 \varphi \rightarrow dr = -2R \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$, et le dénominateur $\sqrt{R-r} = \sqrt{R} \sin \varphi$.
L'intégrale (9.1.1) devient

$$T_c = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R}{r_0}} \int_{\varphi_f}^0 (-2R \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{c} R \sqrt{\frac{R}{r_0}} \int_0^{\varphi_f} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \quad (9.1.2)$$

$$T_c = \frac{1}{c} R \sqrt{\frac{R}{r_0}} \left(\varphi_f + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_f \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{c} R \sqrt{\frac{R}{r_0}} (2\varphi_f + 2\varphi_f) \quad (9.1.3)$$

En posant $2\varphi = \psi$ $r = R \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} R (1 + \cos 2\varphi)$:

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{2} (1 + \cos \psi) \\ T &= \frac{1}{c} \frac{R}{2} \sqrt{\frac{R}{r_0}} (\psi + \sin \psi) \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

2 – Calcul de la densité

De $e^\lambda = r'^2 \frac{1}{1+f(R)}$, ou encore $\lambda = 2 \ln r' - \ln(1+f(R))$, ou obtient en dérivant :

$$\begin{aligned} \lambda' &= 2 \frac{r''}{r'} - \frac{f'}{1+f} \\ \dot{\lambda} &= 2 \frac{\dot{r}'}{r'} \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

L'équation (3) de (9.5.3) s'écrit

----- 9 Hypothèse des trous noirs -----

$$-\frac{1}{r^2} \frac{1+f}{r'^2} \left[2rr'' + r'^2 - rr' \left(2 \frac{r''}{r'} - \frac{f'}{1+f} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \left[r\dot{r} \left(2 \frac{\dot{r}'}{r'} \right) + \dot{r}^2 + 1 \right] = 8\pi G\rho$$

Dans le premier crochet les termes avec r'' disparaissent. En multipliant les 2 membres par $r^2 r'$ il vient

$$\boxed{-(1+f)r' - rf' + (2r\dot{r}\dot{r}' + r'\dot{r}^2 + r') = 8\pi \frac{G}{c^2} \rho r^2 r'} \quad (9.2.2)$$

Dans la deuxième parenthèse $2r\dot{r}\dot{r}' + r'\dot{r}^2 = (\dot{r}r^2)'$, l'équation (9.2.2) devient

$$-(1+f)r' - rf' + (\dot{r}r^2)' + r' = -fr' - rf' + (\dot{r}r^2)' = 8\pi G\rho r^2 r' \quad (9.2.3)$$

et $\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}$, ou $\dot{r}r^2 = rf(R) + F(R)$, en dérivant donne

$(\dot{r}r^2)' = r'f + rf' + F'$, en reportant dans (9.2.3) :

$$-fr' - rf' + (\dot{r}r^2)' = -fr' - rf' + (r'f + rf' + F') = 8\pi G\rho r^2 r'$$

$$\boxed{F' = 8\pi \frac{G}{c^2} \rho r^2 r'} \quad (9.2.4)$$

3 – Métrique intérieure à la sphère de Schwarzschild

Si $f = 0$ et $F = r_g$ alors $r = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} F^{1/3} [\tau_0(R) - \tau]^{2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} r_g^{1/3} (R - \tau)^{2/3}$

$$\boxed{r = r_g^{1/3} \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{2/3}} \quad (9.3.1)$$

La dérivée par rapport à R de r , $r' = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} r_g^{1/3} \frac{1}{(R - c\tau)^{1/3}}$

$$\boxed{r' = r_g^{1/3} \frac{1}{\left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{1/3}}} \quad (9.3.2)$$

Le coefficient de dR^2 est $e^\lambda = \frac{r'^2}{1+f} = r'^2 = r_g^{2/3} \frac{1}{\left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{2/3}}$

----- 9 Hypothèse des trous noirs -----

$$e^\lambda = \frac{1}{\left[\frac{3}{2} \frac{1}{r_g} (R - c\tau) \right]^{2/3}} \quad (9.3.3)$$

La métrique $ds^2 = c^2 d\tau^2 - e^{\lambda(\tau,R)} dR^2 - r^2(\tau,R) d\Omega^2$ devient, compte tenu de (9.3.1) et de (9.3.3)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{1}{\left[\frac{3}{2} \frac{1}{r_g} (R - c\tau) \right]^{2/3}} dR^2 - r_g^2 \left[\frac{3}{2} \frac{1}{r_g} (R - c\tau) \right]^{4/3} d\Omega^2 \quad (9.3.4)$$

4 référentiel décrivant le champ créé par une masse ponctuelle

On choisit $F = C^{te} = r_g$, $f = -\frac{1}{\left(\frac{R}{r_g}\right)^2 + 1}$ et $\tau_0(R) = \frac{\pi}{2} r_g \frac{1}{(-f)^{3/2}}$.

C'est le cas où $f < 0$:

$$r = \frac{F}{-2f} (1 - \cos u)$$

$$c(\tau_0(R) - \tau) = \frac{F}{2(-f)^{3/2}} (u - \sin u)$$

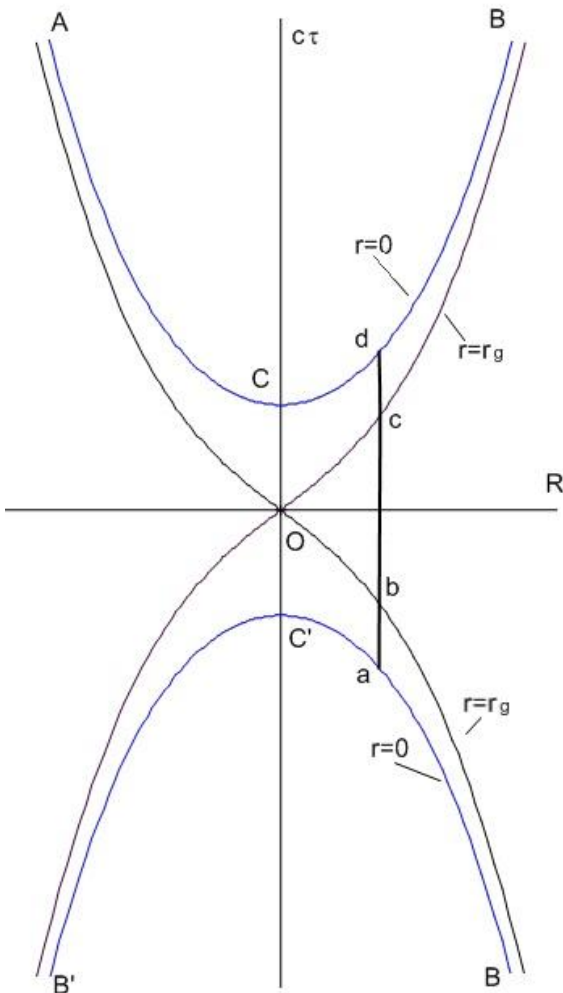
Ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_g} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{R}{r_g} \right)^2 + 1 \right] (1 - \cos u) \\ \frac{c\tau}{r_g} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{R}{r_g} \right)^2 + 1 \right]^{3/2} (\pi - u + \sin u) \end{aligned} \quad (9.4.1)$$

Pour une valeur de R donnée, c'est-à-dire pour une particule donnée, lorsque la variable u varie de 2π à 0 , le rayon r part de 0 , croît jusqu'à une

valeur maximale $\frac{r_g}{2} \left[\left(\frac{R}{r_g} \right)^2 + 1 \right]$ et décroît ensuite

pour revenir à la valeur 0 . Le temps est constamment croissant.



----- **9 Hypothèse des trous noirs** -----

La courbe ACB correspond à la valeur $u = 2\pi$, la courbe A'C'B' correspond à $u = 0$, sur ces 2 courbes le rayon $r = 0$.

Les 2 courbes passant par l'origine O sont les courbes sur lesquelles $r = r_g$

La ligne d'univers d'une particule est la droite $R = C^{te}$. Elle a pour origine le point a, elle perce la sphère de Schwarzschild au point b. A l'instant $\tau = 0$ ou $u = \pi$, l'éloignement de la particule est

$$\text{maximal } r = r_g \left[\left(\frac{R}{r_g} \right)^2 + 1 \right]$$

Ensuite elle se rapproche du centre, perce la sphère de Schwarzschild en c et revient au centre

$$\text{au point d } (u = 0) \text{ à l'instant } c\tau = r_g \frac{1}{2} \left[\left(\frac{R}{r_g} \right)^2 + 1 \right]^{3/2}$$

La métrique de Schwarzschild ne couvre que la région située à droite des $\frac{1}{2}$ courbes $r = r_g$

4 Collapse avec la théorie de Newton

Une sphère de poussière de rayon R et de masse spécifique ρ_0 à l'instant t=0.

Toutes les particules sont au repos à l'instant t=0.

Une particule située au point M à une distance r à du centre l'instant t subit une accélération centrale égale à $\Gamma(r, t) = -\frac{GM}{r(t)^2}$. Si on suppose que lors du mouvement toutes les

particules situées dans la sphère de rayon $r_0 = r(0)$ restent à l'intérieur de cette sphère dont le

rayon diminue $\Gamma(r, t) = -\frac{GM_0}{r(t)^2}$ avec $M_0 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3$.

Pour cette particule $\frac{dv}{dt} = -\frac{GM_0}{r^2}$ soit $\frac{d^2r}{dt^2} + GM_0 \frac{1}{r} = 0$. L'intégrale première de cette

équation donne (en multipliant les 2 membres par $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$

$$\dot{r}^2 - \dot{r}_0^2 = 2GM_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \text{ A l'instant t=0 toutes les particules sont au repos alors } \dot{r}_0 = 0. \text{ Il}$$

reste

$$v(r_0, t) = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM_0} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}$$

----- 9 Hypothèse des trous noirs -----

$$\text{ou } dt = -\frac{1}{\sqrt{2GM_0}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = -\frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{2GM_0}} \sqrt{\frac{r}{r_0}} d\left(\frac{r}{r_0}\right). \text{ Ce qui s'intègre en posant}$$

$$\frac{r}{r_0} = \cos^2 \varphi.$$

$$dt = \frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{2GM_0}} 2 \cos^2 \varphi d\varphi \rightarrow t = \frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{2GM_0}} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right) \text{ ou en posant } \theta = 2\varphi \text{ et en}$$

$$\text{remarquant que } \frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{2GM_0}} = \frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{2G \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_0^3}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2G\pi\rho_0}}, \text{ indépendant de } r_0 :$$

$t = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2G\pi\rho_0}} (\theta + \sin \theta)$	et $v(r_0, t) = -r_0 \frac{4\sqrt{2G\pi\rho_0}}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$
$r(r_0, \theta) = \frac{1}{2} r_0 (1 + \cos \theta)$	

L'expression du temps étant indépendante de r_0 , une particule située à une distance r_1 du centre à l'instant $t = 0$ sera toujours sur un rayon $r(r_1, \theta) = \frac{1}{2} r_1 (1 + \cos \theta)$ et

$$\frac{r(r_1, \theta)}{r(r_0, \theta)} = \frac{r_1}{r_0} = C^{te} < 1.$$

La durée totale du "collapse" à, partir de l'instant $t = 0$ est $t_c = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3}{2G\pi\rho_0}}$.

Les formules donnant t et r avec le paramètre θ sont les mêmes que celles que donnent LANDAU, théorie des champs formule (103.9), et également ELBAZ "Relativité générale et gravitation", page 266, formule 4.28.

La courbe représentative est une cycloïde. En inversant le temps, le "collapse" devient une expansion qui passe par un maximum pour ensuite produire un nouveau "collapse".

Résumé

L'abbé Lemaître a montré que la singularité apparaissant dans les équations lorsque le rayon r est égal au rayon de Schwarzschild était lié au choix des coordonnées. Il a proposé un nouveau système de coordonnées en τ, ρ, θ et φ :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{d\rho^2}{\left(\frac{3}{2} \frac{\rho - c\tau}{r_0}\right)^{3/2}} - r_0^2 \left(\frac{3}{2} \frac{\rho - c\tau}{r_0}\right)^{4/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

où $\frac{r}{r_0} = \left(\frac{3}{2} \frac{\rho - c\tau}{r_0}\right)^{2/3}$. Dans ce système de coordonnées il est possible de suivre le trajet d'une particule jusqu'au centre du trou noir.

Une particule en chute libre à l'extérieur de la sphère de Schwarzschild atteint cette sphère en un temps fini pour un observateur se déplaçant avec la particule et en un temps infini pour un observateur fixe.

Collaps gravitationnel d'une sphère de poussière

Une solution générale peut être trouvée avec une métrique telle que $ds^2 = c^2 d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, R)} dR^2 - r(\tau, R) d\Omega^2$. La solution générale dépend de 3 fonctions de R $f(R)$, $F(R)$ et $\tau_0(R)$ permettant de fixer les conditions initiales. Le calcul de τ en fonction de r

est $c\tau = \varepsilon \frac{F}{f} \int \sqrt{\frac{1}{f} \left(\frac{r \frac{f}{F}}{r \frac{f}{F} + 1} \right)} d\left(\frac{f}{F} r\right)$, avec $\varepsilon = \pm 1$. 3 cas sont possibles $f < 0$, $f = 0$ et $f > 0$

. Pour $f < 0$ la solution est

$$r = \frac{F}{-2f} (1 - \cos u)$$

$$c(\tau_0(R) - \tau) = \frac{F}{2(-f)^{3/2}} (u - \sin u)$$

Sphère initialement au repos

Une solution est obtenue en prenant $\tau_0(R) = C^{te}$, $f = -\sin^2 R$ et $F = 2a_0 \sin^3 R$. La métrique devient $ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau) [dR^2 + \sin^2 R (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$ et l'évolution du rayon de la sphère

$$r = a_0 \sin R (1 + \cos v)$$

$$c\tau = a_0 (v + \sin v)$$

La durée du collaps est

$$\tau_f = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3}{2\pi G \rho_0}}$$