10
Métrique de Friedmann-Lemaître
Expansion de l'univers

1 – Espace isotrope

Les étoiles sont réparties dans l'espace de façon peu homogène et sont organisées en galaxies. Si on veut étudier l'Univers "à grande échelle" il faut s'abstraire des hétérogénéités locales. On entend alors par densité de masse la densité de masse dans des espaces qui sont grands par rapport aux dimensions des galaxies.

L'homogénéité de l'espace et son isotropie permettent de choisir un temps universel tel qu'à tout instant la métrique de l'espace soit la même en tous les points et suivant toutes les directions.

2- Propriété de la métrique spatiale

La métrique de l'espace tridimensionnel, en ne tenant pas compte de sa dépebdance du temps s'écrit

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 3$$

Si l'isométrie est complète on démontre que le tenseur de courbure tridimensionnel s'écrit

$$\boxed{P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda\left(\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}\right)} \qquad (10\text{-}1.1)$$

Le tenseur de Ricci $P_{\alpha\gamma} = \gamma^{\beta\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda\gamma^{\beta\delta}\left(\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}\right)$

$$P_{\alpha\gamma} = \lambda\left(\gamma^{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - \gamma^{\beta\delta}\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}\right) = \lambda\left[\left(\gamma^{\beta\delta}\gamma_{\beta\delta}\right)\gamma_{\alpha\gamma} - \left(\gamma^{\beta\delta}\gamma_{\beta\gamma}\right)\gamma_{\alpha\delta}\right]$$

__Rappel__ : $\gamma^{\beta\delta}\gamma_{\alpha\delta} = \delta_\alpha^\beta$ et $\gamma^{\beta\delta}\gamma_{\beta\delta} =$ Nombre de dimensions = 3.

$P_{\alpha\gamma} = \lambda\left(3\gamma_{\alpha\gamma} - \delta_\alpha^\beta\gamma_{\beta\gamma}\right) = 2\gamma_{\alpha\gamma}$ soit :

$$\boxed{P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}} \qquad (10\text{-}1.2)$$

Et la courbure : $P = \gamma^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} = 6\lambda$:

$$\boxed{P = 6\lambda} \qquad (10\text{-}1.3)$$

Les propriétés de courbure de l'espace isotrope ne dépendent que d'un seul paramètre.

3 cas peuvent se présenter : $\begin{cases} \lambda > 0 & \text{Espace fermé} \\ \lambda = 0 & \text{Espace euclidien} \\ \lambda < 0 & \text{Espace ouvert} \end{cases}$

Les modèles d'Univers qui suivent sont les modèles de Friedmann et Lemaître, qui ont travaillé indépendamment l'un de l'autre.

Alexandre Alexandrovitch Friedmann est un astrophysicien et mathématicien russe.
Entre 1918 et 1920, Alexandre Friedmann est professeur à l'Université de Perm, puis à Petrograd de 1920 à 1924, où il enseigne la physique et les mathématiques. Du fait de l'isolement des scientifiques soviétiques, Friedmann ne découvre l'existence de la théorie de la relativité générale d'Einstein qu'en 1920. Il entreprend dès lors d'en chercher les solutions exactes. Il entrevoit le premier que cette théorie mêlant gravitation, temps et espace, permet l'étude de la structure de l'univers dans son ensemble.

L'article fondateur de la cosmologie non statique est publié en juin 1922. Friedmann y décrit trois types d'évolution dans le temps de l'Univers, impliquant notamment une singularité initiale. Une violente controverse oppose à distance Friedmann à Albert Einstein, qui refusera longtemps un univers non statique.
Alexander Friedmann est l'un des trois « pères » de l'expansion de l'univers, avec Georges Lemaître et George Gamow.
Il meurt précocement en 1925 des suites d'une pneumonie contractée lors d'un vol en ballon stratosphérique

3 – Métrique spatiale

3.1 Espace isotrope fermé

Dans un espace à 4 dimensions l'équation d'une sphère, en coordonnées cartésiennes serait

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2 \tag{10-2.1}$$

et l'élément de longueur

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

L'équation (10-2.1) de la sphère donne $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 = 0$. En extrayant dx_4^2 de cette expression $dx_4 = -\dfrac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{x_4}$ et x_4^2 de l'équation de la sphère et en reportant dans l'élément de longueur :

$$\boxed{dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{\left(x_1dx_1 + dx_2dx_2 + x_3dx_3\right)^2}{a^2 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}} \qquad (10\text{-}2.2)$$

Cette expression se simplifie en utilisant les coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases} \text{ ce qui donne : } \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \\ x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 = rdr \end{cases}$$

Et de même $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)$

(10-2.2) devient $dl^2 = dr^2 + r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right) + \dfrac{r^2dr^2}{a^2 - r^2}$

$$\boxed{dl^2 = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}}dr^2 + r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)} \qquad (10\text{-}2.3)$$

3.1.1 Courbure de cet espace

Les composantes du tenseur fondamental sont

$\gamma_{11} = \dfrac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}}$, $\gamma_{22} = r^2\sin^2\theta$, $\gamma_{33} = r^2$	$\gamma^{11} = 1/\gamma_{11}$, $\gamma^{22} = 1/\gamma_{22}$, $\gamma^{33} = 1/\gamma_{33}$

Les seuls symboles de Christoffel de première espèce non nuls sont de la forme $\Gamma_{1\alpha\alpha}$ ou $\Gamma_{\alpha 1\alpha}$: $\Gamma_{111}, \Gamma_{122}, \Gamma_{133}, \Gamma_{212}$ et Γ_{313} ainsi que Γ_{223} et Γ_{322}

$$\Gamma_{111} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(1 - r^2/a^2\right)^{-1} = \frac{r}{a^2}\left(1 - r^2/a^2\right)^{-2},\ \Gamma_{122} = -r\sin^2\theta,\ \Gamma_{133} = -r$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{221} = r\sin^2\theta,\ \Gamma_{313} = \Gamma_{331} = r, \Gamma_{223} = \Gamma_{232} = r^2\sin\theta\cos\theta, \Gamma_{322} = -\Gamma_{223}$$

Les symboles de Christoffel de seconde espèce non nuls sont

$$\Gamma_{11}^1 = \gamma^{11}\Gamma_{111} = \frac{r}{a^2}\frac{1}{1 - r^2/a^2},\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \gamma^{22}\Gamma_{221} = \frac{1}{r} \text{ et } \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \gamma^{33}\Gamma_{313} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{23}^2 = \gamma^{22}\Gamma_{223} = \cos\theta/\sin\theta,\ \Gamma_{22}^3 = \gamma^{33}\Gamma_{322} = -\sin\theta\cos\theta$$

La composante P_{11} du tenseur de Ricci $P_{11} = \Gamma_{11,k}^k - \Gamma_{1k,1}^k + \Gamma_{11}^k\Gamma_{km}^m - \Gamma_{1k}^m\Gamma_{1m}^k$, en développant :

$$P_{11} = \Gamma^1_{11,1} - \left(\Gamma^1_{11,1} + \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^3_{13,1}\right) + \Gamma^1_{11}\left(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\right) - \left(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13}\right).$$

Tous calculs faits

$$\boxed{P_{11} = \frac{2}{a^2}\frac{1}{1-\frac{r^2}{a^2}}} \tag{10-2.4}$$

Comme d'après (10-1.2) $P_{11} = 2\lambda\gamma_{11} = 2\lambda\frac{1}{1-\frac{r^2}{a^2}}$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{a^2}} \tag{10-2.5}$$

L'origine des coordonnées peut être placée en n'importe quel point de l'espace

Dans ces coordonnées la surface de la sphère de rayon $r = R$ est $S = 4\pi R^2$ et son rayon est $rayon = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = aArc\sin\frac{R}{a}$.

Si on pose maintenant

$$\boxed{r = a\sin\chi} \tag{10-2.6}$$

Avec $\frac{1}{1-\frac{r^2}{a^2}}dr^2 = \frac{1}{1-\sin^2\chi}a^2\cos^2\chi d\chi^2 = a^2 d\chi^2$ la métrique (10-2.3) devient

$$\boxed{dl^2 = a^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(\sin^2\theta + d\varphi^2\right)\right]} \tag{10-2.7}$$

La surface de la sphère devient $S = 4\pi a^2\sin^2\chi$ et son rayon $rayon = a\chi$ et

$$\frac{Surface}{(rayon)^2} = 4\pi\left(\frac{\sin\chi}{\chi}\right)^2 < 4\pi$$

La surface de la sphère $S < 4\pi a^2$

Le volume total de l'Univers fermé $V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} a^3 \sin\theta \sin^2\chi d\chi$

$$\boxed{V = 2\pi^2 a^3} \tag{10-2.8}$$

Le volume total de l'univers fermé est fini.

3.2 Espace isotrope ouvert

L'équation de la "sphère" devient

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -a^2$$

et la métrique

$$dl^2 = \frac{1}{1+\frac{r^2}{a^2}} + r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$

Avec

$$r = a\,\text{sh}\,\chi$$

$$\boxed{dl^2 = a^2\left[d\chi^2 + \text{sh}^2\chi\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right]} \tag{10-2.9}$$

La surface de la sphère pour une valeur de χ donnée est

$$S_s = 4\pi a^2\,\text{sh}^2\chi$$

Son rayon étant $r = a\,\text{sh}\,\chi$ le rapport $\dfrac{S_s}{(rayon)^2} = 4\pi\left(\dfrac{\text{sh}\,\chi}{\chi}\right)^2 > 4\pi$

Cette surface croit indéfiniment lorsque χ croit indéfiniment.

3.3 Espace isotrope euclidien

La métrique est la métrique euclidienne

$$dl^2 = dr^2 + r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$

4 – Choix d'un référentiel

On choisit un référentiel **comobile**, ou concomitant (terme utilisé par LANDAU).

C'est un référentiel qui se déplace en tout point de l'univers. C'est la matière remplissant l'espace qui sert de référentiel. Les horloges liées aux particules indiquent leur temps propre. Donc $c^2dt^2 = g_{00}c^2dt^2 \rightarrow g_{00} = 1$. Toutes les directions sont équivalentes → $g_{0\alpha} = 0$

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 \tag{10-3.1}$$

4.1 Espace courbe fermé

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\chi^2 + \sin^2\chi\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right] \quad (10\text{-}3.2)$$

La fonction $a(t)$ est déterminée par les équations d'Einstein.

Il est commode d'utiliser une variable sans dimension $\eta(t)$ définie par $d\eta = \frac{cdt}{a(t)}$. $a(t)$ devient alors une fonction de η, notée $a(\eta)$. La variable t est remplacée par la variable η

$$\boxed{cdt = a(\eta)d\eta} \quad (10\text{-}3.3)$$

$$\boxed{ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right]} \quad (10\text{-}3.4)$$

4.1.1 Equations d'Einstein

Lorsque l'espace n'est pas vide, les équations d'Einstein sont

$$\boxed{R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}} \quad (10\text{-}3.5)$$

En élevant un indice :

$$\boxed{R_i^j - \frac{1}{2}\delta_i^j R = \frac{8\pi G}{c^4}T_i^j} \quad (10\text{-}3.6)$$

où $k = G$. T_{ij} est le tenseur impulsion-énergie. En l'absence d'énergie électromagnétique ce tenseur s'écrit :

$$\boxed{T_{ij} = (p+\varepsilon)u_i u_j - pg_{ij}} \quad (10\text{-}3.7)$$

ε est la densité d'énergie, p est la pression.

En montant un indice : $T_i^j = g^{jk}T_{ik} = (p+\varepsilon)g^{jk}u_i u_k - pg^{jk}g_{ik}$

$$\boxed{T_i^j = (p+\varepsilon)u_i u^j - \delta_i^j p} \quad (10\text{-}3.8)$$

Dans l'étude de l'expansion de l'Univers, en dehors des instants initiaux, on peut considérer que $p = 0$.

Dans le référentiel comobile les particules sont au repos. La seule composante non nulle de la quadri-vitesse est $u_0 = \frac{1}{a}$. Avec ces hypothèses la seule composante non nulle du tenseur T_i^j est $T_0^0 = \varepsilon = \rho c^2$, ρ étant la densité de matière par unité de volume.

4.1.2 Mise en équations

Les composantes du tenseur fondamental sont :

$g_{00} = a^2,\ g_{11} = -a^2,\ g_{22} = -a^2 \sin^2 \chi,\ g_{33} = -a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta$. Les symboles de Christoffel de seconde espèce non nuls : $\Gamma^0_{00} = \dfrac{a'}{a},\ \Gamma^0_{\alpha\alpha} = -\dfrac{a'}{a^3} g_{\alpha\alpha},\ \Gamma^\alpha_{0\alpha} = \dfrac{a'}{a}$ où $a' = \dfrac{da}{d\eta}$

Les composantes du tenseur de Ricci non nulles sont

$$\boxed{\begin{aligned} R^0_0 &= \frac{3}{a^4}\left(a'^2 - aa''\right) \\ R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 &= -\frac{1}{a^4}\left(2a^2 + a'^2 + aa''\right) \end{aligned}} \qquad (10\text{-}3.9)$$

La courbure $R = R^0_0 + 3R^1_1$

$$R = -\frac{6}{a^3}\left(a + a''\right) \qquad (10\text{-}3.10)$$

La première des équations d'Einstein (10-3.6) s'écrit

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G}{c^4} T^0_0 = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2$$

$$\boxed{\frac{3}{a^4}\left(a^2 + a'^2\right) = \frac{8\pi G}{c^2}\rho} \qquad (10\text{-}3.11)$$

Dans cette équation il y a 2 inconnues $\rho(\eta)$ et $a(\eta)$**.** Il faut par conséquence une deuxième équation.

La masse totale $M = \rho V$. Cette masse est invariable. Le volume $V = 2\pi^2 a^3$

$$\boxed{\rho = \frac{M}{2\pi^2 a^3}} \qquad (10\text{-}3.12)$$

En reportant dans (10-3.11) :

$$\boxed{\left(a^2 + a'^2\right) = \frac{4G}{3\pi c^2} Ma} \qquad (10\text{-}3.13)$$

Si $a_0 = \dfrac{2GM}{3\pi c^2} \rightarrow a'^2 = a\left(2a_0 - a\right)$ ou encore $u'^2 = u\left(2-u\right) = 1-\left(u-1\right)^2$ où $u = \dfrac{a}{a_0}$

.Cette expression donne $\left(\dfrac{d\eta}{du}\right)^2 = \dfrac{1}{1-\left(u-1\right)^2} \rightarrow d\eta = \mp\dfrac{du}{\sqrt{1-\left(u-1\right)^2}} = \pm\dfrac{d\left(u-1\right)}{\sqrt{1-\left(u-1\right)^2}}$.

Ce qui s'intègre en $\eta = \pm \text{Arccos}\left(u-1\right) + C^{te}$.

$\cos\left(\eta - C^{te}\right) = \pm\left(u-1\right) = \pm\left(\dfrac{a}{a_0}-1\right)$. 2 possibilités :

1. avec le signe $+$: $a = a_0\left(1+\cos\left(\eta - C^{te}\right)\right)$, et suivant (10-3.3)$cdt = a\left(\eta\right)d\eta$

   $ct = a_0\left(\left(\eta - C^{te}\right) + \sin\left(\eta - C^{te}\right)\right) + C$

2. avec le signe $-$: $a = a_0\left(1-\cos\left(\eta - C^{te}\right)\right)$ et

   $ct = a_0\left[\left(\eta - C^{te}\right) - \sin\left(\eta - C^{te}\right)\right] + C$

Les constantes d'intégration sont ajustées pour les conditions initiales choisies : pour $t = 0$, il faut $a = 0$. On peut toujours choisir que pour $\eta = 0$ le temps $ct = 0$. Le cas n°1 conduit à choisir $C = C^{te} = \pi$ et $a = a_0(1-\cos\eta)$ et $ct = a_0\left(\eta - \sin\eta\right)$. Le cas n°2 donne le même résultat final avec $C = C^{te} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= a_0\left(1-\cos\eta\right) \\ ct &= a_0\left(\eta - \sin\eta\right) \end{aligned}} \qquad (10\text{-}3.14)$$

On retrouve comme courbe représentative du "rayon de l'univers" en fonction du temps une cycloïde.

Le rayon de l'univers passe par un maximum a_0 et décroit ensuite pour revenir à 0. Toutefois les formules (10-3.14) ne sont plus valables lorsque $a \rightarrow 0$. La densité de matière tend vers l'infinie et il n'est plus possible de négliger la pression p dans le tenseur Impulsion-énergie (10-3.8).

4.2 Espace courbe ouvert

En refaisant les calculs, on trouve

$$\boxed{\begin{aligned} a &= a_0\left(\text{ch}\,\eta - 1\right) \\ ct &= a_0\left(\text{sh}\,\eta - \eta\right) \end{aligned}} \qquad (10\text{-}3.15)$$

Le "rayon de l'univers croît indéfiniment avec le temps.

5 Déplacement vers le rouge

5.1 Situation du problème

Le rayon de courbure de l'univers est une fonction du temps. Cette variation de courbure entraine une variation de distance spatiale entre les corps.

A un instant donné, pour un observateur se trouvant sur l'un des corps tout se passe comme si tous les autres corps se déplaçaient suivant des directions radiales. La vitesse de fuite à un instant donné est proportionnelle à cette distance.

On place l'origine des coordonnées (χ,θ,φ) au point où arrive le rayon lumineux. Les rayons lumineux, pour des raisons de symétrie, se propagent suivant la ligne radiale $(d\theta = d\varphi = 0)$.

Pour un rayon lumineux $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2) = 0 \rightarrow d\chi^2 = d\eta^2$

$$\boxed{\chi = \pm\eta + C^{te}} \tag{10-4.1}$$

Le signe $+$ pour les rayons qui partent de l'origine et le signe $-$ pour ceux qui y arrivent.

Dans un univers fermé, un rayon issu de l'origine parviendra au pôle opposé, $\chi = \pi$. Ensuite il se rapprochera de son point de départ et y reviendrait, $\chi = 2\pi$ .Dans ce cas la variation de la variable η serait de 2π , ce qui est impossible, sauf si le rayon lumineux a été émis à l'instant correspondant $\eta = 0$ c'est-à-dire $t = 0$.

5.2 Rayon arrivant au point d'observation

Si le rayon émis à l'instant $t(\eta)$ arrive au point $\chi_0 = 0$ à $t(\eta_0)$ alors il provient d'un point de coordonnée χ telle que, suivant (10-4.1) $\chi - \chi_0 = -(\eta - \eta_0)$

$$\chi = \eta_0 - \eta > 0$$

5.2.1 Univers observable

En un point donné, à un instant donné $t(\eta_0)$ ne sont observables que les parties de l'univers pour lesquelles $\chi < \eta_0$

Les points d'où proviennent les rayons reçus à l'instant $t(\eta)$ et émis à un instant $t(\eta - \chi)$ se trouvent sur une sphère centrée à l'origine et de rayon $r = a(\eta - \chi)\sin\chi$, $a(\eta - \chi)$ est le rayon de l'univers correspondant à l'instant où le rayon a été émis. La surface de cette sphère est

$$S = 4\pi\left[a(\eta - \chi)\sin\chi\right]^2 \tag{10-4.2}$$

En prenant la valeur de r dans (10-3.14), $a(\eta) = a_0(1 - \cos\eta)$, la surface de la sphère s'écrit

$$S = 4\pi a_0^2\left[\left(1-\cos(\eta-\chi)\right)\sin\chi\right]^2$$

Cette surface est égale à 0, pour $\chi = 0$, elle croît, passe par un maximum pour $\chi = \frac{\eta}{3}$,

elle vaut alors $S_{\max} = 16\pi a_0^2 \sin^6\frac{\eta}{3}$ décroît ensuite et s'annule lorsque $\chi = \eta$.

Dans un univers fermé, la section définie par le cône de lumière est non seulement finie mais elle est fermée.

5.2.2 Matière observable

Le volume élémentaire est $dV = \sqrt{|\gamma|}d\chi d\theta d\varphi$, $|\gamma|$ étant la valeur du déterminant du tenseur métrique de l'espace tridimensionnel. En prenant ces valeurs dans (10-2.9) ou dans (10-3.4) pour tenir compte du fait que $a = a(\eta)$.

$$dV = a^3(\eta)\sin^2\chi\sin\theta d\chi d\theta d\varphi \qquad (10\text{-}4.3)$$

En suivant le même raisonnement en tenant compte du fait qu'au point de coordonnée χ, à l'instant η de l'observateur, les quantités $\rho(\eta)$ et $a(\eta)$ doivent prise aux instants $(\eta-\chi)$ $M_{obs} = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\chi=0}^{\chi=\eta}\rho(\eta-\chi)a^3(\eta-\chi)\sin^2\chi\sin\theta d\chi d\varphi d\theta$

Cette intégrale étant à variables séparées s'intègre :

$$M_{obs} = \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\right]\left[\int_0^{2\pi}d\varphi\right]\left[\int_0^{\eta}\rho(\eta-\chi)a^3(\eta-\chi)\sin^2\chi d\chi\right]$$

Soit :

$$M_{obs} = 4\pi\int_0^{\eta}\rho(\eta-\chi)a^3(\eta-\chi)\sin^2\chi d\chi$$

A chaque instant, d'après (10-3.12) le produit $\rho a^3 = \frac{M}{2\pi^2}$

$$M_{obs} = \frac{2M}{\pi}\int_{\chi=0}^{\chi=\eta}\sin^2\chi d\chi = \frac{2M}{\pi}\frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{2}\sin 2\eta\right)$$

$$\boxed{M_{obs} = \frac{M}{\pi}(\eta - \sin\eta\cos\eta)} \qquad (10\text{-}4.4)$$

La masse observable à partir d'un point donnée varie de 0 à l'instant 0, croît et passe par un maximum égal à la masse totale pour $\eta = \pi$, soit $ct = a_0\pi$. Pour les temps ultérieurs, la masse semble continuer à croître, mais du fait de la rétractation de l'univers, les mêmes masses peuvent être observées 2 fois.

Dans un espace ouvert lamasse observable serait

$$\boxed{M'_{obs} = \frac{3c^2 a_0}{2G}\left(\mathrm{sh}\,\eta\,\mathrm{ch}\,\eta - \eta\right)} \qquad (10\text{-}4.5)$$

La masse observable dans un espace ouvert croît indéfiniment.

5.2.3 Variation de fréquence de la lumière

Pendant le voyage du rayon lumineux, le rayon de l'univers $a(\eta)$ change. Les signaux sont émis, au point de coordonnée χ, pendant un intervalle de temps correspondant à $d\eta$. Ils seront reçus à l'origine pendant également un intervalle de temps correspondant au même $d\eta$. En effet le début d'émission au point χ est η_d, il est reçu à l'origine à $\eta_{0d} = \eta_d - \chi$. La fin de l'émission en η_f, elle est reçue à l'origine à $\eta_{0f} = \eta_f - \chi$. On a bien $\eta_{0f} - \eta_{0d} = \eta_f - \eta_d$.

Si $d\eta$ correspond à la période de la longueur d'onde du rayon émis $T_e = a(\eta - \chi)d\eta$. Ce rayon reçu à l'origine aura une période de $T_r = a(\eta)d\eta$.

$$\frac{T_r}{T_e} = \frac{a(\eta)}{a(\eta - \chi)}$$

Pour les fréquences $f = \frac{1}{T}$ ou les pulsations $\omega = 2\pi f$, le rapport est inversé

$$\boxed{\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}} \qquad (10\text{-}4.6)$$

En période d'expansion de l'univers $a(\eta) > a(\eta - \chi)$. Il y a un glissement vers le rouge (Redshift).

Si les distances sont "faibles",

$$a(\eta - \chi) \approx a(\eta) - a'(\eta)\chi$$

$$\boxed{\frac{\omega_r}{\omega_e} = 1 - \frac{a'}{a}\chi} \qquad (10\text{-}4.7)$$

Dans la métrique spatiale $dl = a d\chi$. Si les distances sont faibles $l = a\chi$ et

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = 1 - \frac{a'}{a^2} l \qquad (10\text{-}4.8)$$

$a' = \frac{da}{d\eta}$, mais $cdt = ad\eta \rightarrow d\eta = \frac{c}{a}dt$ et $a' = \frac{a}{c}\frac{da}{dt}$ et $\frac{\omega_r}{\omega_e} = 1 - \frac{c}{a}\frac{da}{dt} l$

$$\boxed{H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}} \qquad (10\text{-}4.9)$$

H est la **constante de Hubble**.

$$\boxed{z = \frac{\omega_e - \omega_r}{\omega_e} = H\frac{l}{c}} \qquad (10\text{-}4.10)$$

Si le déplacement des fréquences est attribué à l'effet Doppler on peut déterminer la vitesse de fuite des galaxies. En écrivant $z = \frac{v}{c}$

(Si les vitesses étaient élevées il faudrait écrire la relation relativiste $z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ avec $\beta = \frac{v}{c}$)

$$\boxed{v = Hl} \qquad (10\text{-}4.11)$$

Les valeurs actuellement admises sont $H \simeq 0{,}810^{-10}$ / $an \rightarrow \frac{1}{H} = 13 \times 10^9$ années. L'accroissement Δv de vitesse serait dans ce cas de 75 km/s par mégaparsec (1 parsec = 3,86 années-lumière).

D'autres estimations donnent $\frac{1}{H} = 18 \times 10^9$ années et $\Delta v = 55$ km/s par mégaparsec.

5.2.4 Univers ouvert, univers fermé

Dans le modèle fermé $\left[\frac{3}{a^4}\left(a^2 + a'^2\right) = \frac{8\pi G}{c^2}\rho\right]$ suivant l'équation (10-3.13). La constante de Hubble $H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{c}{a^2}a'$, avec $a' = \frac{da}{d\eta} \rightarrow \frac{a'}{a^2} = \frac{H}{c}$. L'équation ci-dessus devient

$$\boxed{\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - H^2} \qquad (10\text{-}4.12)$$

Dans le modèle ouvert on aura

$$\boxed{\frac{c^2}{a^2} = H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho} \qquad (10\text{-}4.13)$$

Il apparait une densité critique

$$\boxed{\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2} \qquad \text{(10-4.14)}$$

En exprimant H en (km/s)/(Mégaparsec), sa valeur actuelle est de l'ordre de $100h$ avec $\frac{1}{2} \leq h \leq 1$, la densité critique actuelle est de $\rho_{c0} = 2 \times 10^{-29} h^2 \text{g/cm}^3 \approx 10{,}5 h^2 \text{GeV/m}^3$

Si $\rho > \rho_c$, l'univers est fermé

Si $\rho < \rho_c$, l'univers est ouvert

Les valeurs actuellement connues orienteraient vers un univers ouvert.

Résumé

Un espace tridimensionnel courbe isotrope a une métrique de la forme

$$dl^2 = \frac{1}{1-\alpha\frac{r^2}{a^2}}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Si $\alpha = -1$ l'espace est fermé, $\alpha = +1$ l'espace est ouvert et $\alpha = 0$ l'espace est "plat" euclidien.

Espace fermé : $r = a\sin\chi \;\Rightarrow\; dl^2 = a^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$

Espace ouvert : $r = \operatorname{sh}\chi \;\Rightarrow dl^2 = a^2\left[d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$

Métrique de Friedmann-Lemaître

Dans espace à 4 dimensions homogène et isotrope la métrique est $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$. En posant $cdt = a(\eta)d\eta$ (la variable t est remplacée par la variable η)

Espace fermé : $ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$

Espace ouvert : $ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$

Si l'énergie de l'espace est uniquement constituée par la matière (ρc^2), et si la pression est nulle

Espace fermé

Les équations d'Einstein conduisent à la relation $\left(a^2 + a'^2\right) = \frac{4G}{3\pi c^2}Ma$, M étant la masse de l'univers. La solution en est

$$a = a_0\left(1-\cos\eta\right)$$
$$ct = a_0\left(\eta - \sin\eta\right)$$

Le "rayon" a de l'univers passe par un maximum et ensuite redevient nul.

Espace ouvert

Les calculs donnent

$$a = a_0\left(\operatorname{ch}\eta - 1\right)$$
$$ct = a_0\left(\operatorname{sh}\eta - \eta\right)$$

L'univers est toujours en expansion.

Constante de Hubble

La lumière parvenant des étoiles ou galaxies subit une déviation vers le rouge

$$\frac{\omega_{reçu}}{\omega_{émis}} = \frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)} \sim 1 - \frac{a'}{a}\chi \qquad \boxed{H = \frac{a'}{a}}$$ est la constante de Hubble

Densité critique la densité $\rho_c = \frac{3}{8\pi G}H^2$ est la densité critique : si $\rho \le \rho_c$ l'univers est ouvert, si $\rho > \rho_c$ l'univers est fermé.