# 11
# Origine (possible) de l'univers
# Invention du Big Bang

## 1 – Age de l'Univers

**Préambule**

L'archevêque irlandais James Ussher, estimait que l'âge de la terre, à partir de l'ancien testament, était de 3017 ans.

Un érudit, le docteur John Lightfoot, complète même l'information:

- Dieu a créé la Terre le lundi 23 d'Octobre de l'an 4 004 avant J.-C. à 9h
- le matin du 25, il fit apparaître la vie et le soir même, microbes, tritons, araignées, serpents, aigles, chats, chevaux et singes
- le samedi, Adam et Ève, créés dans le jardin d'Eden.

Kelvin : quelques centaines de milliers d'années, c'était le temps estimé pour le refroidissement de du magma initial, seul explication pour la température de la terre..

Rutherford : un millions d'années

La découverte de la radioactivité, de l'astronomie et de la cosmologie ont changé ces estimations.

### 1.1 Rappel

Equation d'Einstein de l'évolution de l'univers :

$$\frac{3}{a^4}\left(a^2 + a'^2\right) = \frac{8\pi G}{c^2}\rho \qquad (11\text{-}1.1)$$

La dérivée $a'$ est prise par rapport à la variable sans dimension $\eta$, avec $cdt = ad\eta$

Où $a$ est le rayon de l'univers à un instant donné.

Coefficient de Hubble :

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} \qquad (11\text{-}1.2)$$

Densité critique

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \qquad (11\text{-}1.3)$$

On définit un facteur de densité cosmologique

$$\boxed{\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}} \qquad (11\text{-}1.4)$$

et un facteur de ralentissement

$$\boxed{q = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}} \qquad (11\text{-}1.5)$$

Pour des raisons de facilités le rayon de l'univers sera noté $R$ et la variable utilisée dans les équations sera la variable temps $t$ ➔ $a' = \frac{da}{d\eta} = \frac{da}{dt}\frac{dt}{d\eta} = \frac{a}{c}\dot{a} = \frac{1}{c}R\dot{R}$.

L'équation(11-1.1)devient

$$\boxed{\dot{R}^2 + c^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2} \qquad (11\text{-}1.6)$$

### 1.2 Mise en équations

En divisant les 2 membres de l'équation(11-1.6) par $R^2$ : $\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$

$$\boxed{H^2 + \frac{c^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho} \qquad (11\text{-}1.7)$$

D'où il résulte $\rho = \frac{3H^2}{8\pi G} + \frac{3}{8\pi G}\frac{c^2}{R^2} = \rho_c + \frac{3}{8\pi G}\frac{c^2}{R^2}$ et $\frac{3}{8\pi G}\frac{c^2}{R^2} = \rho - \rho_c$

$$\boxed{\frac{3}{8\pi G}\frac{c^2}{R^2} = \rho_c\left(\Omega - 1\right)} \qquad (11\text{-}1.8)$$

Le facteur de ralentissement peut s'écrire $q = -\frac{\ddot{R}}{R}\frac{R^2}{\dot{R}^2} = -\frac{\ddot{R}}{R}\frac{1}{H^2}$

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -qH^2} \qquad (11\text{-}1.9)$$

En dérivant l'équation(11-1.6)par rapport au temps $\frac{d}{dt}\left(\dot{R}^2 + c^2\right) = \frac{8\pi G}{3}\frac{d}{dt}\left(\rho R^2\right)$. On siat que la matière est conservée et que $\rho R^3 = C^{te}$, ce qui permet d'écrire $\frac{d}{dt}\left(\dot{R}^2 + c^2\right) = \frac{8\pi G}{3}\frac{d}{dt}\left(\rho R^3 \frac{1}{R}\right) = \frac{8\pi G}{3}\rho R^3 \frac{d}{dt}\frac{1}{R}$. Tous calculs effectués :

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{4\pi G}{3}\rho = 0} \qquad (11\text{-}1.10)$$

En écrivant $\frac{4\pi G\rho}{3}=\left(\frac{16}{3}-\frac{12}{3}\right)\pi G\rho=2\frac{8\pi G\rho}{3}-4\pi G\rho$. Le premier terme du second membre peut être extrait de (11-1.6) : $\frac{8\pi G\rho}{3}=\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}$ soit

$\frac{4\pi G\rho}{3}=2\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}\right)-4\pi G\rho$ et l'équation (11-1.10) devient

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R}+2\frac{\dot{R}^2}{R^2}+2\frac{c^2}{R^2}=4\pi G\rho} \qquad (11\text{-}1.11)$$

### 1.3 Solution

En remplaçant dans (11-1.11) $\frac{\ddot{R}}{R}$ par sa valeur tirée de (11-1.9) on obtient

$$-qH^2+2H^2+2\frac{c^2}{R^2}=4\pi G\rho=4\pi G\Omega\rho_c=4\pi G\Omega\frac{3H^2}{8\pi G}=\frac{3}{2}\Omega H^2$$

$\rho_c$ étant remplacé par sa valeur (11-1.3).soit

$$2\frac{c^2}{R^2}=\left(\frac{3}{2}\Omega+q-2\right)H^2$$

L'équation $\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{4\pi G}{3}\rho=0$ peut s'écrire $-qH^2+\frac{4\pi G}{3}\Omega\rho_c$ et en remplaçant $\rho_c$ par sa valeur $\frac{3H^2}{8\pi G}$ : $-qH^2+\frac{4\pi G}{3}\frac{3H^2}{8\pi G}\Omega=0$, il reste

$$\boxed{\Omega=2q} \qquad (11\text{-}1.12)$$

Et finalement

$$\boxed{\frac{c^2}{R^2}=(2q-1)H^2} \qquad (11\text{-}1.13)$$

En reprenant l'équation d'Einstein $\dot{R}^2+c^2=\frac{8\pi G}{3}\rho R^2$, et en divisant les 2 membres par la valeur actuelle $R_0$ de $R$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2+\frac{c^2}{{R_0}^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$$

La quantité $\rho R^3=\rho_0 R_0^3$, soit $\rho=\rho_0\frac{R_0^3}{R^3}$, l'équation précédente devient

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2+\frac{c^2}{R_0{}^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho_0\frac{R_0}{R}=\frac{8\pi G}{3}\Omega_0\rho_{c0}\frac{R_0}{R}$$

Sachant que $\rho_{c0}=\dfrac{3H_0^2}{8\pi G}$ et que $\dfrac{c^2}{R_0^2}=\left(2q_0-1\right)H_0^2$ et $\Omega_0=2q_0$, il reste

$$\boxed{\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2+\left(2q_0-1\right)H_0^2=2q_0H_0^2\frac{R_0}{R}} \qquad (11\text{-}1.14)$$

En posant $x=\dfrac{R}{R_0}$, l'équation à intégrer devient

$$\boxed{\dot{x}^2=H_0{}^2\left[\left(1-2q_0\right)+2q_0\frac{1}{x}\right]} \qquad (11\text{-}1.15)$$

## Remarque importante

Tous les calculs précédents ont été réalisés avec l'équation d'Einstein établie pour le modèle d'univers fermé. Toutefois l'équation (11-1.15) est valable quel que soit le modèle d'univers : fermé avec $\Omega_0=2q_0>1$, euclidien $\Omega_0=2q_0=1$, ouvert $\Omega_0=2q_0<1$. En effet l'équation (11-1.13) $\dfrac{c^2}{R^2}=\left(2q-1\right)H^2$ utilisée pour établir cette équation aurait pu être écrite $k\dfrac{c^2}{R^2}=\left(2q-1\right)H^2$ avec pour l'univers fermé $k=1$, pour l'univers euclidien $k=0$ et pour l'univers ouvert $k=-1$.

**Modèle fermé**

Dans le modèle fermé la densité de l'univers est supérieure à la densité critique l'équation(11-1.15) peut s'écrire $\dot{x}^2=H_0{}^2\left[\dfrac{\Omega_0}{x}-\left(\Omega_0-1\right)\right]$ et $\dfrac{dx}{dt}=H_0\sqrt{\dfrac{\Omega_0}{x}-\left(\Omega_0-1\right)}$.

$$\boxed{dt=\frac{1}{H_0}\int\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{\Omega_0}{x}-\left(\Omega_0-1\right)}}} \qquad (11\text{-}1.16)$$

L'intégration se fait en écrivant

$t=\dfrac{1}{H_0}\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{\Omega_0-\left(\Omega_0-1\right)x}}dx=\frac{1}{H_0}\frac{\Omega_0}{\left(\Omega_0-1\right)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{u}{1-u}}du$ en ayant effectué le changement de variable $u=\dfrac{\Omega_0-1}{\Omega_0}x$. Pour achever avec $u=\sin^2 v$, $du=2\sin v\cos v dv$ et

$$\int\sqrt{\frac{u}{1-u}}du=\int\frac{\sin v}{\cos v}2\sin v\cos v dv=\int 2\sin^2 v dv=\int(1-\cos 2v)dv=\frac{1}{2}(2v-\sin 2v).$$

Soit en posant $\theta = 2v$ :

$$\boxed{t=\frac{1}{H_0}\frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0-1)^{3/2}}(\theta-\sin\theta)} \tag{11-1.17}$$

Quant à $x=\frac{R}{R_0}$ : $x=\frac{\Omega_0}{\Omega_0-1}u=\frac{\Omega_0}{\Omega_0-1}\sin^2 v=\frac{\Omega_0}{\Omega_0-1}\frac{1}{2}(1-\cos 2v)$

$$\boxed{\frac{R}{R_0}=\frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{\Omega_0-1}(1-\cos\theta)} \tag{11-1.18}$$

Les constantes d'intégrations choisies sont telles que pour $\theta = 0$, le rayon et le temps sont nuls.

Le rayon actuel de l'univers est, par définition, $R_0$ et de (11-1.18) vient

$$\cos\theta=1-2\frac{\Omega_0-1}{\Omega_0}=\frac{2}{\Omega_0}-1,\ \theta=\text{Arccos}\left(\frac{2}{\Omega_0}-1\right),\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\Omega_0}\sqrt{\Omega_0-1}.$$

En reportant dans (11-1.17), le temps actuel $t_f$ de l'univers est

$$\boxed{t_f=\frac{1}{2}\frac{1}{H_0}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0-1)^{3/2}}\left[\text{Arccos}\left(\frac{2}{\Omega_0}-1\right)-\frac{2}{\Omega_0}\sqrt{\Omega_0-1}\right]} \tag{11-1.19}$$

La valeur maximale du rayon $R$ sera atteinte lorsque $\theta = \pi$

$$\boxed{t_{\max}=\frac{1}{H_0}\frac{\pi}{2}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0-1)^{3/2}}} \tag{11-1.20}$$

**Modèle euclidien**

La densité est égale à la densité critique $\Omega_0 = 2q_0 = 1$ L'équation (11-1.15) devient

$\dot{x}^2 = {H_0}^2\frac{1}{x}$ et $dt=\frac{1}{H_0}\sqrt{x}dx$

$$\boxed{t=\frac{2}{3}\frac{1}{H_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3/2}} \tag{11-1.21}$$

$$\boxed{\frac{R}{R_0}=\left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}} \tag{11-1.22}$$

L'âge de l'univers euclidien serait

$$\boxed{t_e = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0}} \qquad (11\text{-}1.23)$$

**1.3.3 Modèle ouvert**

C'est le cas où la densité est inférieure à la densité critique $\Omega_0 = 2q_0 < 1$. L'équation (11-1.14) donne $\frac{dx}{dt} = H_0\sqrt{(1-\Omega_0) + \frac{\Omega_0}{x}}$

$$dt = \frac{1}{H_0}\frac{dx}{\sqrt{(1-\Omega_0) + \frac{\Omega_0}{x}}}$$

Les calculs donnent

$$\boxed{\frac{R}{R_0} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{1-\Omega_0}(\text{ch}\,\theta - 1)} \qquad (11\text{-}1.24)$$

$$\boxed{t = \frac{1}{2}\frac{1}{H_0}\frac{\Omega_0}{(1-\Omega_0)^{3/2}}(\text{sh}\,\theta - \theta)} \qquad (11\text{-}1.25)$$

Age actuel :

$$\boxed{t_o = \frac{1}{2}\frac{1}{H_0}\frac{\Omega_0}{(1-\Omega_0)^{3/2}}\left[\frac{2}{\Omega_0}\sqrt{1-\Omega_0} - \text{Argch}\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right)\right]} \qquad (11\text{-}1.26)$$

**1.3.4 Valeurs de l'âge de l'univers**

Les valeurs actuellement estimées de $H_0$ se situe entre 50 et 100 (km/s)/MegaParsec.

Ce qui donne pour $\frac{1}{H_0} \approx 9{,}9\frac{100}{v}$, $\frac{1}{H_0}$ étant exprimé en milliards d'années et $v$ en (km/s)/MegaParsec.

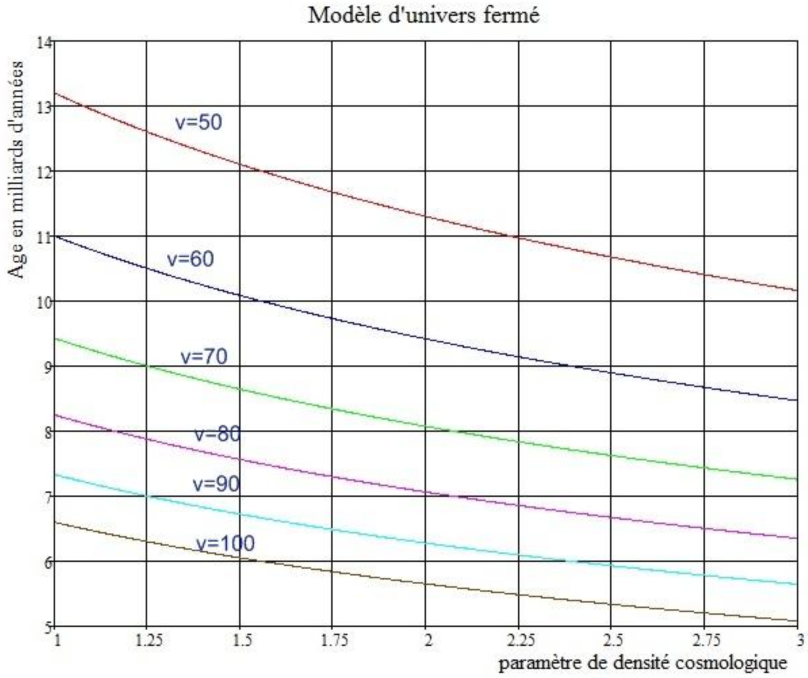



Figure 1

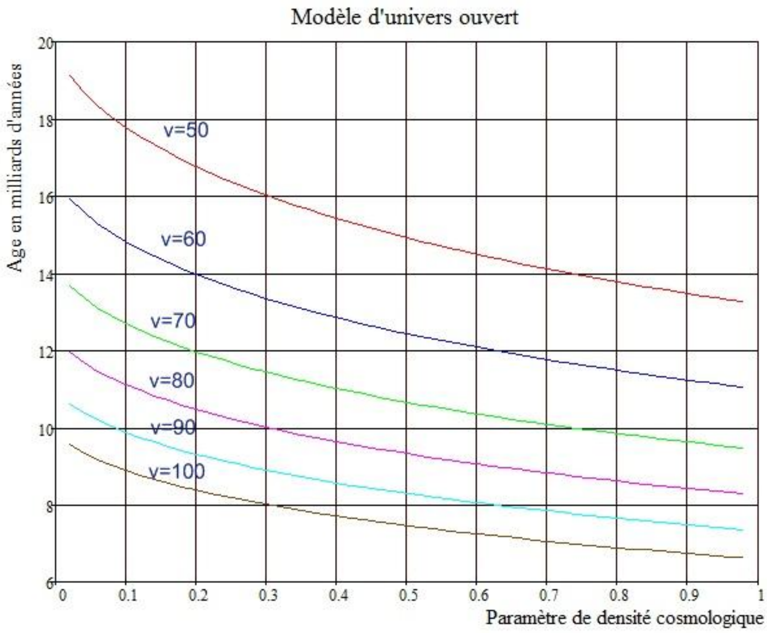



Figure 2

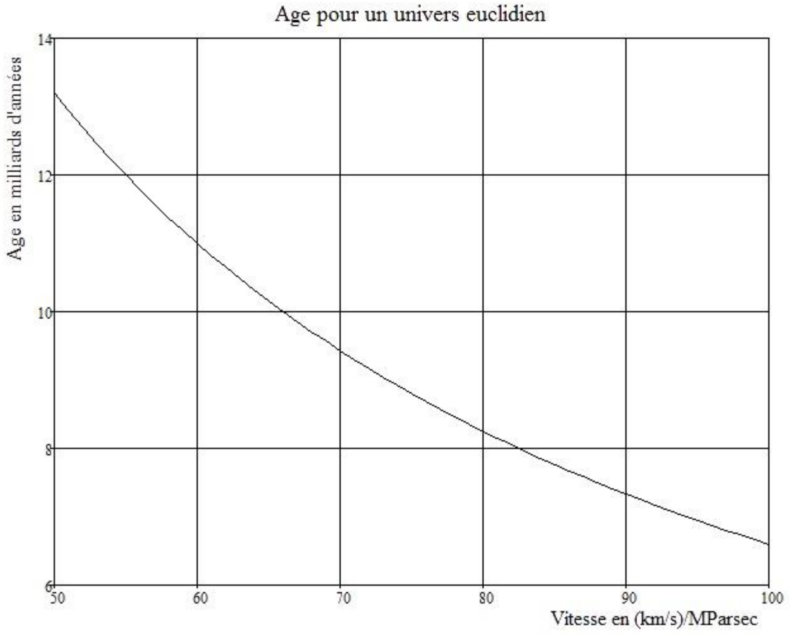



Figure 3

L'âge le plus probable est celui qui correspond à un univers ouvert. Pour une vitesse de (50 km/s)/Mégaparsec l'âge de l'univers se situerait actuellement entre 14 et 18 milliards d'années.

### 1.3.5 Rayon actuel de l'univers

Dans l'étude des modèles de Friedmann-Lemaître, l'évolution de l'univers est décrit parv les équations suivantes :

Pour le modèle fermé

$$\boxed{\begin{aligned} R &= a = a_0(1-\cos\eta) \\ ct &= a_0(\eta - \sin\eta) \end{aligned}} \qquad (11\text{-}1.27)$$

Pour le modèle ouvert

$$\boxed{\begin{aligned} R &= a = a_0(\mathrm{ch}\,\eta - 1) \\ ct &= a_0(\mathrm{sh}\,\eta - \eta) \end{aligned}} \qquad (11\text{-}1.28)$$

Ce sont évidemment les mêmes équations que celles qui viennent d'être établies. Ce qui permet pour chacun des modèles de déterminer $a_0$ de 2 façons différentes, dans les équations donnant le rayon et dans les équations donnant le temps.

## Modèle fermé

$a_0 = R_0 \dfrac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{H_0}\dfrac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$, ce qui donne un rayon actuel :

$$\boxed{R_{0f} = \frac{c}{2H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_0 - 1}}} \qquad (11\text{-}1.29)$$

et $a_0 = \dfrac{c}{2H_0}\dfrac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$

Exemple $H_0 = 50$ (km/s)/MégaParsec, $\Omega_0 = 2$ ➔ $R_{0f} \approx 9{,}9$ Milliards d'années-lumière

**Modèle ouvert**

$a_0 = R_0 \frac{\Omega_0}{1-\Omega_0} = \frac{1}{2}\frac{c}{H_0}\frac{\Omega_0}{\left(1-\Omega_0\right)^{3/2}}$ , ce qui donne

$$\boxed{R_{0o} = \frac{c}{2H_0}\frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}}} \quad (11\text{-}1.30)$$

Exemple : $H_0 = 50$ (km/s)/Mégaparsec, $\Omega_0 = 0.1$ ➔ $R_{0o} \approx 10{,}5$ Milliards d'années-lumière.

### 1.3.6 Remarque

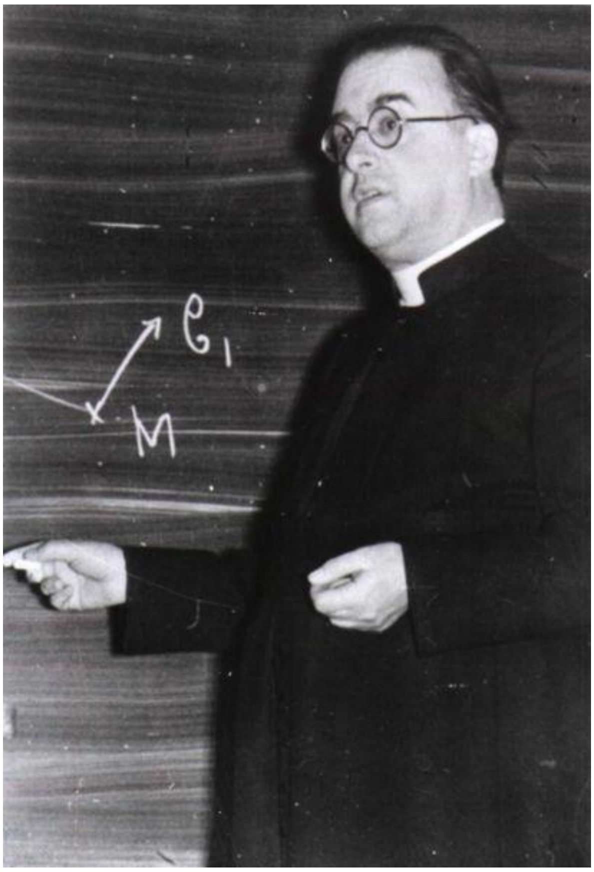
L'abbé Lemaître qui fut le premier à imaginer une création de l'univers ne trouvait qu'un âge de l'univers de 2 milliards d'années en utilisant la valeur connue à l'époque de la constante c, de Hubble. Cette constante était estimée à (600 km/s)/Mégaparsec, soit environ 10 fois la valeur estimée actuellement. Comme l'âge de la Terre était déjà, estimé à plus de 4 milliards d'années, il réintroduisit la constante cosmologique d'Einstein pour expliquer un âge plus grand de l'Univers.

## 2 – Le passé de l'Univers

Que univers est actuellement en expansion. Qu'il soit ouvert, euclidien ou fermé, les équations montrent que plus on recule dans le passé, plus le rayon de l'univers est petit. Il atteint une valeur zéro en un temps fini dans le passé.

Plus le rayon devient petit, plus la densité de l'univers est croissante et même tend vers l'infini lorsque le rayon rend vers zéro.

Les hypothèses utilisées pour calculer l'expansion et l'âge de l'univers ne sont plus valables lorsque les densités deviennent très grandes, il faut introduire dans le tenseur impulsion-énergie, l'énergie électromagnétique, une pression non nulle du fluide cosmique.



Toutefois les calculs faits précédemment sur l'âge de l'univers sont peu affectés, quant à l'ordre de grandeur des résultats obtenus. Les phénomènes faisant intervenir l'énergie électromagnétique et la pression n'affectent "que les quelques centaines de milliers d'années" de l'univers initial.

## 3 Invention du Big Bang

L'abbé **Georges Lemaître**, (Charleroi, 17 juillet 1894 – Louvain, 20 juin 1966), est à l'origine de l'idée de la création de l'Univers en un point, origine de l'espace et du temps. L'observation du décalage vers le rouge de la lumière des nébuleuses lointaines traduit l'expansion de l'Univers. Cette expansion observée actuellement implique que dans le passé l'Univers était plus contracté.

Lemaître crée un modèle d'évolution de l'Univers en 3 phases :

- Une première phase d'expansion rapide;
- Une deuxième phase de stagnation
- La troisième phase d'expansion.

Le texte fit envoyé le 9 mai 1933 par Lemaître est considéré comme la charte de la théorie du Big Bang.

En 1933, Lemaître est également le premier à montrer que la surface de la sphère de Schwarzschild n'est pas une singularité physique, mais qu'elle est liée au choix du système de coordonnées et il donne un nouveau choix de coordonnées. Ce problème ne sera repris qu'en 1960. Il montre également que le rayon $R = 0$ correspond à une singularité cosmologique. Ce problème sera repris par HAWKING et PENROSE dans les années 1960 ("Théorème sur les singularités"). Il n'y avait rien avant la création et il n'y aurait rien après une contraction en un rayon nul de l'Univers. L'idée d'un Univers "phénix" doit être abandonné.

A partir de 1948 une autre conception de l'Univers triomphe : celle de la création continue ("Little Bangs ?"). L'Univers ne change pas. Cette thèse est soutenue et développée, entre autres, par le grand cosmologiste anglais Fred HOYLE (1915-2001).

Fred HOYLE accueillant Lemaître à un congrès à PASADENA en 1960 le présenta sous forme de dérision "this is le Big Bang Man". Le terme "Big Bang" est passé à la postérité.

Fred HOYLE se rallia par la suite à la théorie du Big Bang. Il apporta sa contribution en établissant la suite des réactions nucléaires aboutissant à la création de tous les éléments connus. Il montra en particulier que la création des métaux, au-delà du fer, étaient créés de l'explosion des supernovas.

Georges GAMOW (Odessa 1904 – Boulder 1968), ancien élève de Friedmann, apporta une contribution importante à la théorie. Si Lemaître avait écrit que l'univers initial était très dense, GAMOW y ajouta qu'il était très chaud.

Lemaître recherchait dans les rayons cosmiques une trace de l'Univers primitif. Gamow dit qu'il fallait chercher un vestige sous forme d'un rayonnement de corps noir à la température de 5°K. Ce rayonnement fut découvert "par hasard" en 1965 par Arno PENZIAS et Robert WILSON à la température de 3°K. M$^{gr}$ Lemaître apprit la nouvelle de ce qu'il avait appelé "l'éclat disparu de la formation des mondes", quelques jours avant sa mort et déclara "Je suis content, maintenant, au moins, on en a la preuve".

## 4 Les premiers instants

### 4.1 Système d'unités de Planck

C'est un système dans lequel un certain nombre de constantes fondamentales de la physique sont prises égales à 1, en particulier la constante de Planck $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, la constante de gravitation universelle $G$, la vitesse de la lumière $c$ et la constante de Boltzmann $k_b$ :

| Constante | Symbole | Valeur en SI | Dimensions |
| --- | --- | --- | --- |
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c$ | $299\,792\,458$ m/s | $LT^{-1}$ |
| Gravitation | $G$ | $6{,}67428\times10^{-11}$ $m^3kg^{-1}s^{-2}$ | $L^3M^{-1}T^{-2}$ |
| Constante de Dirac | $\hbar$ | $1{,}054571\times10^{-34}$ Js | $L^2MT^{-1}$ |
| Boltzmann | $k_b$ | $1{,}380650\times10^{-23}$ $JK^{-1}$ | $L^2MT^{-2}\Theta$ |

(11-4.1)

Dans ce système d'unités les valeurs des longueurs, masses, temps et températures calculées dans le système SI sont :

| Dimension | Expression | Valeur en SI |
| --- | --- | --- |
| Longueur | $l_p=\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ | $1{,}616\,252\times10^{-35}$m |
| Masse | $m_p=\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ | $2{,}176\,44\times10^{-8}$kg |
| Temps | $t_p=\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$ | $5{,}39124\times10^{-44}$s |
| Température | $T_p=\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G{k_b}^2}}$ | $1{,}416\,785\times10^{32}$°K |
| Densité | $\rho_p=\frac{c^5}{\hbar G^2}$ | $5{,}155\,00\times10^{96}$kg/m$^3$ |
| Energie | $E_p=\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$ | $1{,}9561\times10^{9}$J |

(11-4.2)

Remarque : le produit de l'énergie de Planck par le temps de Planck $E_pt_p=\hbar$ respecte la relation d'incertitude d'Heisenberg.

### 4.2 Les premiers instants, évolution de la température

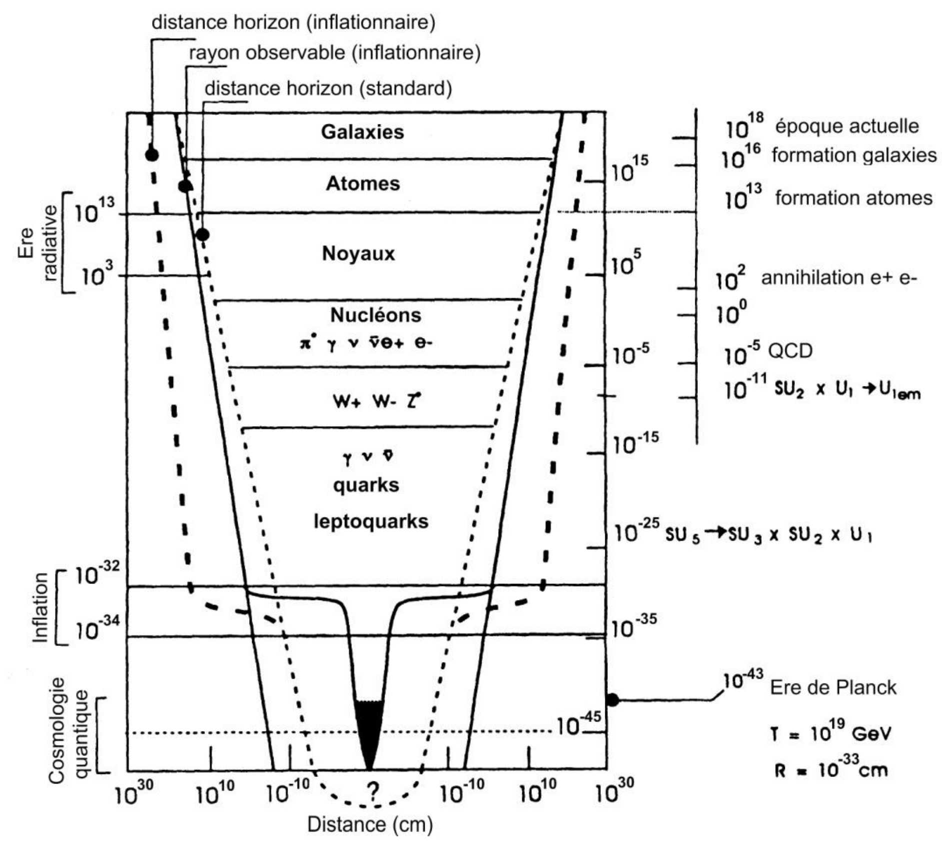



**Figure 4 (extraite du livre "COSMOLOGIE "d'Edgard ELBAZ)**

Sur la figure 4, est représentée l'évolution "complète" de l'Univers depuis l'instant 0.

#### 4.2.1 Instant 0

La température $T > 10^{32}°K$ et l'énergie $E > 10^{19}\text{GeV}$. C'est cette énergie qui va générer tout l'Univers.

#### 4.2.2 Epoque de Planck

Pendant cette période toutes les interactions fondamentales sont unifiées en une seule interaction. La physique actuelle est incapable d'étudier cette période.

#### 4.2.3 Les premières minutes

Pendant les premières minutes sont créés les constituants de la future matière.

Il faut aussi remarquer une période d'une "durée" de l'ordre de $10^{-32}$ seconde appelée "période inflationnaire", théorie encore contestée. Pendant cette durée le rayon de l'Univers croît d'une taille infinitésimale à environ la taille d'une pamplemousse ou peut-être d'un ballon de football. Selon cette théorie entre le début $t_i$ et la fin $t_f$ de cette période le rayon et la température évoluent comme

$$\boxed{\left.\begin{aligned} R_f &= R_i e^{H(t_i - t_f)} \\ T_f &= T_i e^{-H(t_i - t_f)} \end{aligned}\right\} e^{H(t_i - t_f)} \sim 10^{50}} \qquad (11\text{-}4.3)$$

**Remarque**

Même si le rayon de l'Univers atteint $10$ cm, la vitesse moyenne de croissance est de $10^{33}\, cm/s$, soit $10^{28} km/s$ ou encore $\sim 3\times 10^{22}$ fois la vitesse de la lumière!

## 5 L'ère radiative

### 5.1 Mise en équations

Après environ ½ heures tous les nucléons ont été créés. L'Univers est encore très chaud $(T > 10^9\, °K)$. L'énergie est essentiellement encore une énergie de radiation obéissant à la loi de Stephan.

Dans un tel gaz, on peut montrer que les lois sont

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon &= aT^4 \\ p &= \frac{1}{3}\varepsilon \\ RT &= C = C^{te} \end{aligned}} \qquad (11\text{-}5.1)$$

Avec $\varepsilon$ est la densité d'énergie, $p$ la pression, $R$ le rayon de l'Univers, $T$ la température.et $a$ la constante de Stephan-Boltzmann.

**Remarque sur la constante de Stephan-Boltzmann**

Il ya 2 constantes de Stephan.

1. La constante $\sigma$ utilisée dans la radiation du corps noir : $W = \sigma T^4$. Elle vaut $\sigma = \dfrac{\pi^2 k_B^2}{60\hbar^3 c^2}$, où $k_B$ est la constante de Boltzmann.
   $\sigma = 5.670400\times 10^{-8}$ W·m$^{-2}$K$^{-4}$
2. La constante $a$ qui est relative à l'énergie totale du corps noir. La densité d'énergie est $aT^4$. Cette constante $\boxed{a = \dfrac{4\sigma}{c} = \dfrac{\pi^2 k_B^2}{15\hbar^3 c^3}}$.
   $a = 7{,}5657\times 10^{-16}$ Jm$^{-3}$K$^{-4}$

De ces lois découle $T = \dfrac{C}{R}$ ➔ $\varepsilon = \dfrac{C^4}{R^4}$ et en différentiant

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -4\frac{\dot{R}}{R} \qquad (11\text{-}5.2)$$

En se limitant à un univers "plat", l'équation de Friedmann-Lemaître s'écrit

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon \qquad (11\text{-}5.3)$$

Ou encore $\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{1}{4}\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon}$, équation qui s'intègre facilement : $\frac{d\varepsilon}{dt} = -4\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}}\varepsilon^{3/2}$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{3c^2}{32\pi c^2}\frac{1}{t^2}} \tag{11-5.4}$$

L'énergie de radiation $\varepsilon = aT^4$ et la température suit la loi

$$T = \sqrt[4]{\frac{3c^2}{32a\pi G}}\frac{1}{\sqrt{t}}$$

En exprimant, inversement le temps en fonction de la température

$$\boxed{t_{(années)} = 1000\frac{73{,}8\times10^8}{\left(T_{(°K)}\right)^2} = 1000\left(\frac{85{,}49\times10^3}{T}\right)^2} \tag{11-5.5}$$

**5.2 Durée de l'ère radiative**

L'ère radiative prend fin lorsque l'énergie $\rho c^2$ due à la matière devient prépondérante : $\rho c^2 > aT^4$.

Lorsque la matière est prépondérante, nous avons vu que le produit $\rho R^3$ reste constant, il traduit la conservation de la matière. Il s'ensuit que le rapport $\frac{\rho}{T^3}$ est également constant. A la fin de l'ère radiative au temps $T_E$, la densité de matière $\rho_E$ s'obtient en partant des valeurs actuellement connues $\rho_0$ et $T_0$

$$\rho_E = \rho_0\left(\frac{T_E}{T_0}\right)^3$$

A la fin de l'ère radiative $\rho_E c^2 = aT_E{}^4$, ou $\rho_E = \frac{a}{c^2}T_E{}^4$, en reportant dans l'équation précédente :

$$\boxed{T_E = \frac{\rho_0 c^2}{aT_0^3}} \tag{11-5.6}$$

Si on adopte les valeurs $\rho_0 = 6\times10^{-29} g/cm^3$, $T = 2{,}7°K$ et $a = 7{,}5\times10^{-15}$

$$T_E \approx 4000\ °K$$

Le temps correspondant à cette température et donc à la fin de l'ère radiative est, d'après l'équation (11-5.5) $t \sim 1000\left(\frac{85,49 \times 10^3}{T}\right)^2 \sim 450\,000$ ans. D'autres calculs donnent 380 000 ans. Pour obtenir 380 000 ans il faudrait $T_E = 4380°K$ .

La durée de l'ère radiative représente environ 1 sur cent mille de l'âge actuel de l'Univers estimé à 15 milliards d'années. Ce qui justifie les hypothèses retenues consistant à calculer l'âge de l'Univers en ne tenant compte que de la période où l'énergie de la matière domine.

# Résumé

**Facteur de ralentissement** : $q = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}$, $R$ étant le rayon de l'univers, et $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$.

**Facteur de densité cosmologique** : $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$, $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ est la densité critique, $H$ la constante de Hubble. L'équation d'évolution de l'univers devient $\dot{R}^2 + c^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2$

Après transformation, en posant $x = \frac{R}{R_0}$

$$\boxed{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = H_0^{\,2}\left[\left(1-2q_0\right) + 2q_0\frac{1}{x}\right]}$$

| **Modèle fermé** | $t = \frac{1}{H_0}\frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{\left(\Omega_0 - 1\right)^{3/2}}\left(\theta - \sin\theta\right)$ | $\frac{R}{R_0} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}\left(1-\cos\theta\right)$ |
|---|---|---|

âge actuel $t_{af} = \frac{1}{H_0}\frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{\left(\Omega_0 - 1\right)^{3/2}}\left[\text{Arccos}\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right) - \frac{2}{\Omega_0}\sqrt{\Omega_0 - 1}\right]$

| **Modèle ouvert** | $t = \frac{1}{2}\frac{1}{H_0}\frac{\Omega_0}{\left(1-\Omega_0\right)^{3/2}}\left(\text{sh}\theta - \theta\right)$ | $\frac{R}{R_0} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{1-\Omega_0}\left(\text{ch}\theta - 1\right)$ |
|---|---|---|

âge actuel : $t_{ao} = \frac{1}{2}\frac{1}{H_0}\frac{\Omega_0}{\left(1-\Omega_0\right)^{3/2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right)^2} - \text{Argch}\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right)\right]$

## Taille actuelle de l'univers

**Modèle fermé** : $R_{0f} = \frac{c}{2H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_0 - 1}}$ **Modèle ouvert** : $R_{0o} = \frac{c}{2H_0}\frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}}$

Avec les valeurs actuelles de $\Omega_0$ et $H_0$, l'ordre de grandeur est dans les 2 cas de 10 milliards d'années.

## Passé de l'univers

Les idées actuelles sont :

1. "Temps" 0 : Big Bang
2. Ere de Planck ($t < 10^{-43}$ seconde!), la science actuelle ne peut l'expliquer
3. Inflation en $10^{-32}$ seconde le rayon croît pour atteindre une taille de 10cm
4. Création des nucléons ($t < 1000$ secondes)
5. Ere radiative, l'énergie de rayonnement est supérieure à l'énergie de la matière durée $\approx 400.000$ ans
6. Expansion de l'univers de type poussière.

# Compléments au chapitre 11

## 1 - Distances

Un parsec, abréviation pc, est la distance à laquelle est vue la distance moyenne $UA$ de la Terre au Soleil sous un angle $\alpha = 1''$ d'arc. $\text{pc} = \dfrac{\text{UA}}{\text{tg}\alpha} \approx 206264\ \text{UA}$. Sachant que $UA = 149{,}978 \times 10^6\ \text{km}$.

$$1\text{pc} = 3{,}08568 \times 10^{13}\ \text{km}.$$

Une autre unité de longueur est l'année-lumière, AL. C'est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant 365,25 jours à la vitesse de c = 299792,458 km/s.

$$1\ \text{AL} = 365{,}25 \times 24 \times 3600 \times c = 0{,}94605 \times 10^{13}\ \text{km}$$

$$1\ \text{AL} = 0{,}94605 \times 10^{13}\ \text{km}$$

et

$$\boxed{1\text{pc} = 3{,}262\ \text{AL}}$$

## 2 – Constante de Hubble

La constante de Hubble $H$ intervient pour calculer la vitesse d'éloignement $V$ en fonction de la distance $d$ : $V = Hd$. La constante de Hubble est homogène à l'inverse d'un temps. Cette constante est exprimée habituellement en km/s/Mégaparsec. Combien vaut $1/H$ si $H = H_1$, par exemple $H_1 = 75$ km/s/Megaparsec.

$$\frac{1}{H} = \frac{\text{Megaparsec}}{H_1 \times \text{km/s}} = \frac{\left[10^6 \left(1pc/1AL\right)\right] \times c}{H_1 \times \text{km/s}} = \frac{10^6}{H_1}\left(\frac{1 \times \text{pc}}{1 \times \text{AL}}\right) \times \frac{c}{1 \times \text{km/s}}$$

Si c est exprimé en km/s, $\dfrac{1}{H}$ sera exprimée en années.

$$\boxed{\left(\frac{1}{H}\right)_{\textit{années}} = \frac{10^6 \times 3{,}262 \times 299792}{H_1} = \frac{978}{H_1}10^9}$$

Par exemple si $H_1$=75 km/s/Megaparsec :

$$\boxed{H = 75\ \text{km/s/Megaparsec} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{H} = 13{,}04 \times 10^9\ \text{années}}$$

Pour obtenir la densité critique $\rho_c = \dfrac{3H^2}{8\pi G}$ en kg/m$^3$, il faut exprimer H en l'inverse de secondes. Partant de la valeur de 1/H exprimée en années

$$\left(\frac{1}{H}\right)_{\text{secondes}} = \left(\frac{1}{H}\right)_{\text{années}} \times 365,25 \times 24 \times 3600 = \frac{3,086 \times 10^{19}}{H_1}$$

$$\boxed{H_{(1/s)} = \frac{H_1}{3,086} 10^{-19}}$$

Par exemple

$$H_1 = 75 \Rightarrow H_{(1/s)} = 24,303 \times 10^{-19}$$

Et dans ce cas

$$\rho_c = \frac{3 \times (24,303)^2 \times 10^{-38}}{8\pi \times 6,674 \times 10^{-11}} = 1,056 \times 10^{-26} \text{kg/m}^3$$

Exprimé en g/cm$^3$ :

$$\boxed{\rho_c = 1,056 \times 10^{-26} \text{kg/m}^3 = 1,056 \times 10^{-29} \text{g/cm}^3}$$

**3 – Rayon et âge de l'Univers**

$R_0$ est le rayon actuel de l'univers.

**3.1- Univers fermé**

$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos\theta)$, pour le temps actuel $R = R_0$ et $\theta = \theta_0 = \text{Arccos}\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right)$

et le temps

$$t = \left[\frac{1}{H_0} \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}\right] (\theta - \sin\theta)$$

**3.2 – Univers ouvert**

$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} (\text{ch}\theta - 1)$, pour le temps actuel $R = R_0$ et $\theta = \theta_0 = \text{Argch}\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right)$

$$t = \frac{1}{2} \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\text{sh}\theta - \theta)$$

**Application dans un univers ouvert**

En adoptant $\Omega_0 = 0,445$, $H_0 = 75$ km/s/Mpc, on trouve $\text{ch}\theta_0 = 3,494$ et $\theta_0 = 1,923$ l'âge de l'Univers est alors de 10 milliards d'années.

La valeur $a_0$ dans $R = a_0 (\text{ch}\theta - 1)$ vaut

$$a_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} = 7,02 \times 10^9 \text{ années}$$

Le rayon actuel de l'univers serait

$$R_{actuel} = a_0(\text{ch}\,\theta - 1) = 17{,}5 \times 10^9 \text{ années-lumière}$$

Température du fond diffus

L'émission remonte à l'époque où la température de l'univers était d'environ $T_i = 4000°\text{K}$ et l'âge de l'univers de 400 mille ans. Le rayon de l'univers a continué à croitre. On démontre que le produit $T \times R$ de la température par le rayon reste constant. Dans ce cas

$$\frac{T_{actuelle}}{T_i} = \frac{R_i}{R_{actuel}} = \frac{\text{ch}\,\theta_i - 1}{\text{ch}\,\theta_a - 1}$$

La valeur de $\theta_i$ peut se trouver avec l'équation donnant le temps $ct = a_0\left(\text{sh}\,\theta - \theta\right)$ :

$$\frac{t_i}{t_a} = \frac{\text{sh}\,\theta_i - \theta_i}{\text{sh}\,\theta_a - \theta_a}$$

La valeur de $\theta_i$ étant faible $\text{sh}\,\theta_i - \theta_i \approx \frac{1}{6}\theta_i^3$ et de même $\text{ch}\,\theta_i - 1 \approx \frac{1}{2}\theta_i^2$.

$$\theta_i = \sqrt[3]{6\frac{t_i}{t_a}\left(\text{sh}\,\theta_a - \theta_a\right)} = 0{,}05429$$

Et le rapport $\dfrac{R_a}{R_i} = \dfrac{\text{ch}\,\theta_a - 1}{1/2\left(\theta_i^2\right)} \approx 1690$. Ce qui donnerait une température actuelle de

$$T_a = \frac{4000}{1690} = 2{,}4°K$$

# Fond diffus

La loi du rayonnement du corps noir à une température $T$ :

$$\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left(e^{\frac{1}{\lambda}\frac{hc}{k_B T}} - 1\right)} \qquad (1.1)$$

Ou en posant $\frac{hc}{k_B} = A$ :

$$\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left(e^{\frac{A}{\lambda T}} - 1\right)} \qquad (1.2)$$

- $h = 6,6260755 \times 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck
- $c = 2,99792548 \times 10^{8}$ m/s est la vitesse de la lumière
- $k_B = 1,380650 \times 10^{-23}$ $\mathrm{JK}^{-1}$, la constante de Boltzmann
- $A = 1,43878 \times 10^{-2}$

La courbe représentative de la fonction(1.1) passe par un maximum lorsque sa dérivée s'annule. Le numérateur étant constant, le maximum est atteint lorsque la dérivée du dénominateur $f_T(\lambda) = \lambda^5\left(e^{\frac{A}{\lambda T}} - 1\right)$ s'annule :

$$f_T' = 5\lambda^4\left(e^{\frac{A}{\lambda T}} - 1\right) + \lambda^5\left(-\frac{A}{\lambda^2 T}e^{\frac{A}{\lambda T}}\right) = \lambda^4\left[5\left(e^{\frac{A}{\lambda T}} - 1\right) - \frac{A}{\lambda T}e^{\frac{A}{\lambda T}}\right]$$

En posant $u = \frac{A}{\lambda T}$, la dérivée s'annule si

$$5\left(e^u - 1\right) - ue^u = 0 \qquad (1.3)$$

La racine de cette équation est $u_0 = \frac{A}{\lambda T} = 4,9651142$ soit

$$\boxed{\lambda = \frac{2,8988}{T}10^{-3}} \qquad (1.4)$$

C'est la loi de déplacement de Wien.

Dans le chapitre 10, formule (105.6) : $\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)} = \frac{R_e}{R_r}$.

La longueur d'onde $\lambda_r$ correspondant au maximum du spectre du rayonnement reçu est donc égale à $\lambda_r = \frac{R_e}{R_r}\lambda_e$, $\lambda_e$ étant la longueur d'onde correspondant au maximum aun maximum du spectre du rayonnement émis. Suivant la loi (1.4) les températures sont dans le rapport inverse :

$$T_r = \frac{R_e}{R_r} T_e \tag{1.5}$$

Et finalement le produit $RT$ est conservé.

**Remarque sur la courbe représentant le rayonnement du corps noir**

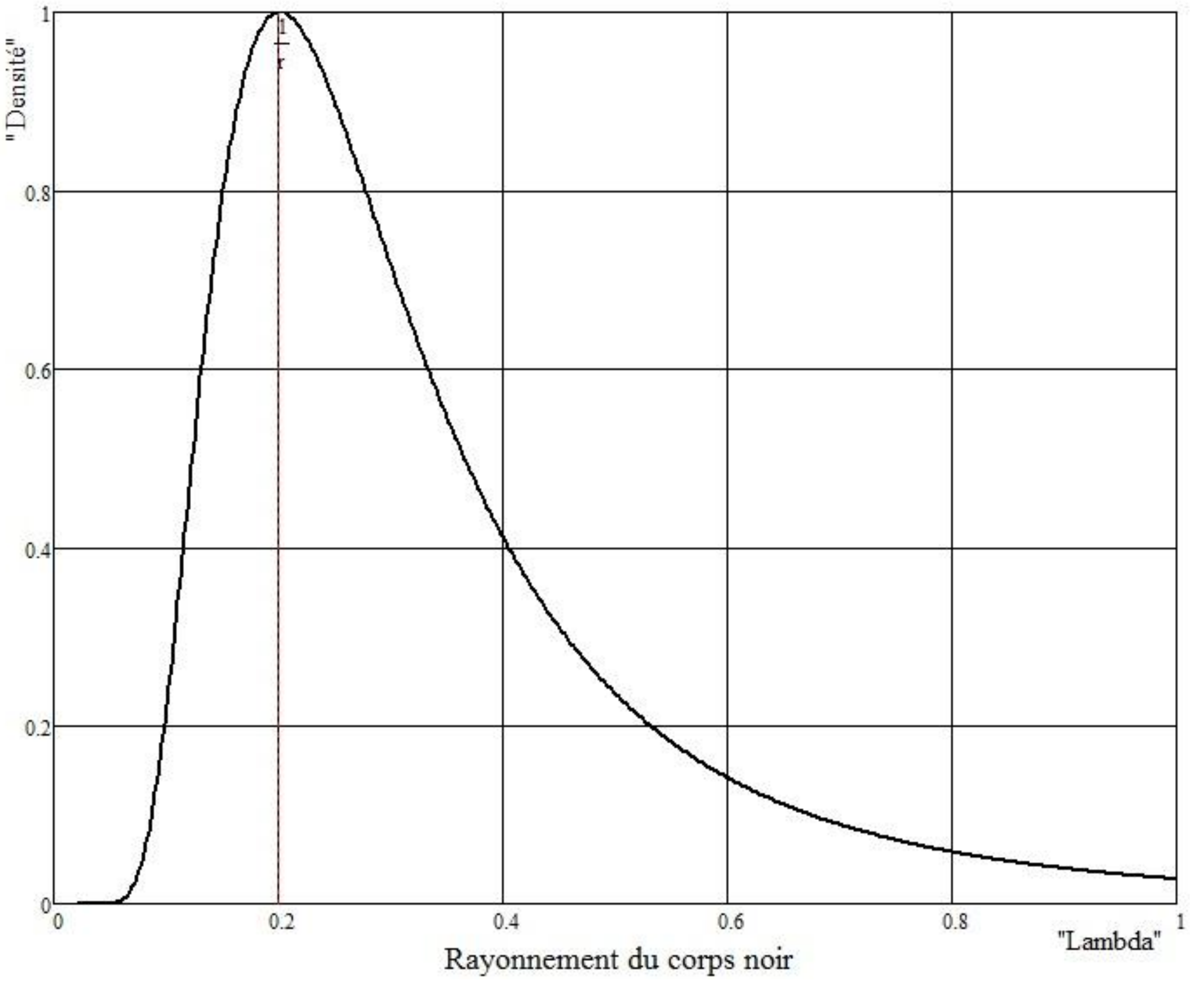
En reprenant l'équation (1.2) et en l'écrivant

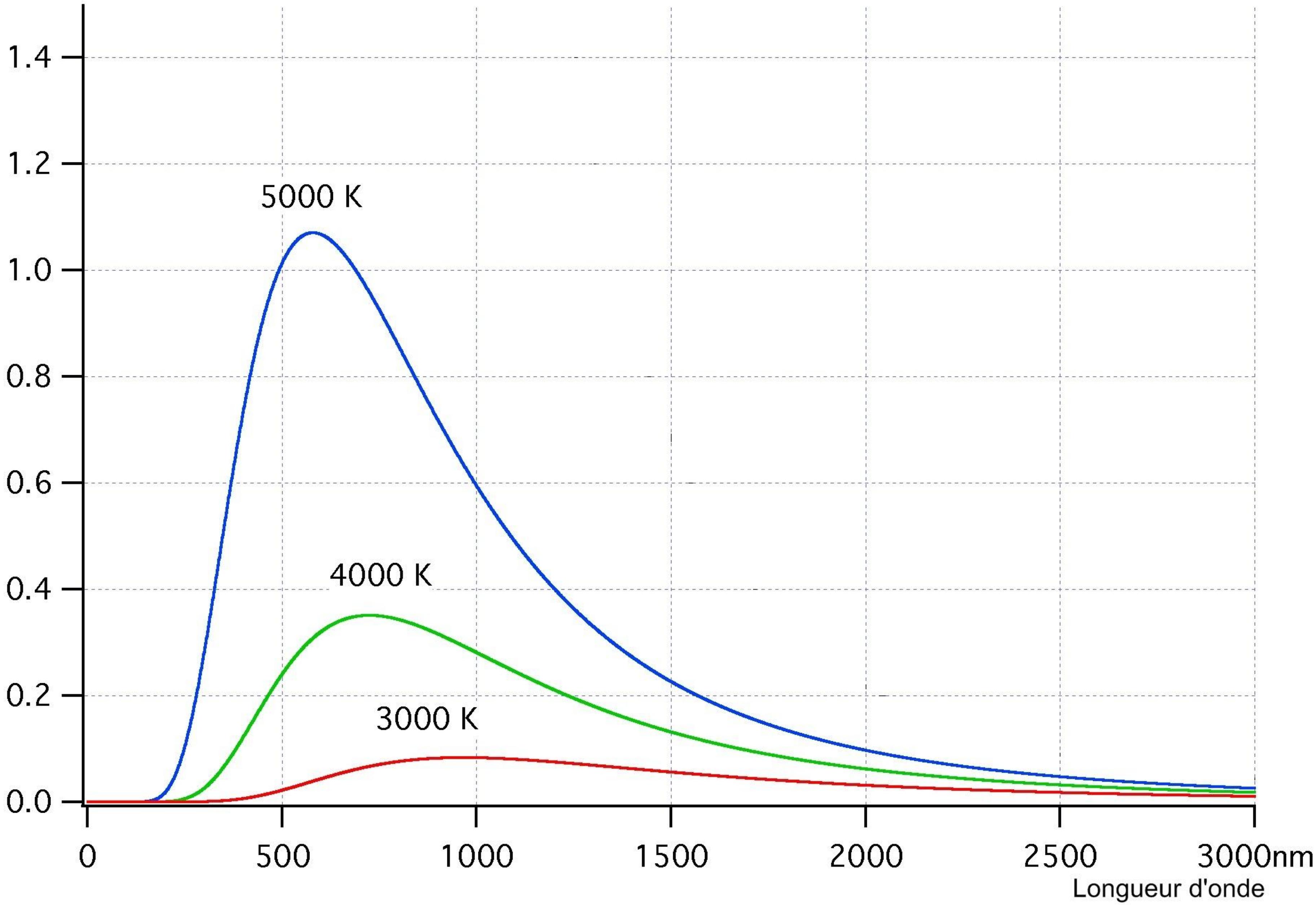
$$\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hcT^5}{A^5 \left(\frac{\lambda T}{A}\right)^5 \left(e^{\frac{A}{\lambda T}} - 1\right)}$$

On voit que toutes les courbes représentatives de

$$\rho_T'(\lambda) = \rho_T(\lambda) \frac{A^5}{8\pi hcT^5} = \frac{1}{\left(\frac{\lambda T}{A}\right)^5 \left(e^{\frac{A}{\lambda T}} - 1\right)} \tag{1.6}$$

sont identiques. Le maximum est atteint pour $\lambda T = \frac{A}{u_0}$ et donc $\frac{A}{\lambda T} = u_0$. Pour le maximum soit égal à 1, il suffit de multiplier par $\frac{\left(e^{u_0} - 1\right)}{u_0^5}$




1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
5000 K
4000 K
3000 K
0
500
1000
1500
2000
2500
3000nm
Longueur d'onde