

Trou noir de Kerr

Toutes les étoiles sont en rotation. Une étoile a donc un moment cinétique. Ce moment cinétique est conservé lorsque l'étoile change de volume, en particulier lorsqu'elle s'effondre et devient un trou noir. Ce trou noir doit également avoir un moment cinétique.

Les trous noirs de Schwarzschild sont obtenus à partir d'une étoile sans moment cinétique. Il faut une autre métrique pour décrire un trou noir en rotation. C'est la "métrique de Kerr".



Roy Patrick Kerr (16 mai 1934) est un mathématicien néo-zélandais qui s'est rendu célèbre en 1963 pour avoir trouvé une solution exacte aux équations de la relativité générale décrivant un trou noir en rotation.

Les capacités de Roy Kerr ont été reconnues très tôt, alors qu'il étudiait au collège *Saint Andrew* de Christchurch. Il entre ensuite au *Canterbury University College* de l'université de Nouvelle-Zélande, qui deviendra plus tard l'Université de Canterbury, d'où il sort diplômé en 1955. Roy Kerr

part ensuite pour l'université de Cambridge où il obtient sa thèse en 1960 sur l'étude des équations du mouvement en relativité générale. Après avoir été chercheur post-doctoral à l'université de Syracuse suivi d'un court passage à la base militaire de l'US Air Force de Wright-Patterson, il est nommé à l'université d'Austin au Texas en 1962, où il trouve peu après la solution qui le rend célèbre. En 1971, Roy Kerr retourne à l'université de Canterbury, où il reste jusqu'à sa retraite en 1993. Il a été pendant dix ans directeur du service de mathématiques de l'université. Il a reçu la médaille Hughes en 1984, ainsi que la médaille Hector en 1982 et la médaille Rutherford en 1993.

1. Métrique axisymétrique

La métrique de Schwarzschild décrit un espace statique et isotrope. Si le trou noir est en rotation, la métrique pour le décrire devra être statique et axisymétrique.

Pour décrire cette espace-temps les 4 coordonnées utilisées sont le temps $t = x^0$, l'angle décrivant la rotation $\varphi = x^3$.

L'univers étant statique les coefficients de la métrique sont indépendants du temps $t = x^0$ et à cause de l'axisymétrie, de l'angle de rotation $\varphi = x^3$:

----- Trou noir de Kerr -----

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2)$$

L'indépendance par rapport à $t = x^0$ et à $\varphi = x^3$ impose que ds^2 ne change pas si on change x^0 en $(-x^0)$ (ou x^3 en $(-x^3)$), ce qui entraîne

$$g_{01} = g_{02} = g_{13} = g_{23} = 0$$

L'élément de longueur prend la forme :

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{03} dt d\varphi + g_{33} (d\varphi)^2 + \left[g_{11} (dx^1)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} (dx^2)^2 \right] \quad (1.1)$$

La quantité dans le crochet est la métrique d'un espace à 2 dimensions. On démontre qu'une telle métrique peut se mettre, par changement de variables, sous la forme

$$C(x^1, x^2) \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 \right] \quad (1.2)$$

La forme (1.1) peut se mettre sous une forme suggérant un corps en rotation :

$$ds^2 = A dt^2 - B (d\varphi - \omega t)^2 - C \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 \right] \quad (1.3)$$

Les variables x^1 et x^2 seront appelées r et θ . Pour permettre aux composantes g_{11} et g_{22} d'être différentes la métrique s'écrira :

$$ds^2 = A dt^2 - B (d\varphi - \omega t)^2 - C dr^2 - D d\theta^2 \quad (1.4)$$

A, B, C et D sont des fonctions de r et θ .

En développant (1.4) :

$$g_{tt} = A - B\omega^2, \quad g_{t\varphi} = B\omega, \quad g_{\varphi\varphi} = -B, \quad g_{rr} = -C, \quad g_{\theta\theta} = -D \quad (1.5)$$

L'inversion de la matrice des coefficients $g_{\mu\nu}$ donne

$$g^{tt} = \frac{1}{A}, \quad g^{t\varphi} = \frac{\omega}{A}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{B\omega^2 - A}{AB}, \quad g^{rr} = -\frac{1}{C}, \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{D} \quad (1.6)$$

2. Une interprétation de ω , entrainement des référentiels

La recherche des géodésiques en recherchant le plus court chemin $C = \int_a^b \frac{ds}{d\lambda} d\lambda$. Cela revient à considérer le "lagrangien"

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

Les dérivées \dot{x}^μ sont prises par rapport à un paramètre λ .

Ce lagrangien conduit aux équations différentielles :

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0} \quad (2.1)$$

Avec la métrique (1.4), l'équation précédente appliquée à la variable $x^3 = \varphi$ donne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -g_{t\varphi} \dot{t} - g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} \text{ et } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

L'équation (2.1) $\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -g_{t\varphi} \dot{t} - g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} = 0.$

$$\boxed{g_{t\varphi} \dot{t} + g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} = 0} \quad (2.2)$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$ étant l'impulsion liée à l'angle φ , c'est-à-dire le moment cinétique, ce moment est conservé le long de la géodésique.

Si la particule a un moment cinétique nul, il reste nul. L'équation (2.2) s'écrit en remplaçant $g_{t\varphi}$ et $g_{\varphi\varphi}$ par leurs valeurs données en (1.5)

$$B\omega\dot{t} - B\dot{\varphi} = B(\omega\dot{t} - \dot{\varphi}) = 0$$

$(\omega\dot{t} - \dot{\varphi}) = 0$ et donc $\frac{d\varphi/d\lambda}{dt/d\lambda} = \omega$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{g^{t\varphi}}{g^{tt}} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{tt}}} \quad (2.3)$$

ω est la vitesse angulaire d'une particule ayant un moment cinétique nul.

Si une particule tombe de l'infini "tout droit" elle est entraînée sous l'action de la gravitation et acquiert une vitesse de rotation de même sens que la source de la gravitation.

On appelle cela "entraînement des référentiels". Un référentiel par rapport auquel la particule est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme. Ainsi, si une particule est au repos dans un référentiel en un point (r, θ, φ) , alors celui-ci doit être en mouvement avec la vitesse de rotation $\omega(r, \theta)$.

3. Surfaces limites de stationnarité

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

Considérons les photons émis depuis une position spatiale donnée (r, θ, φ) dans la direction $\pm\varphi$. Seules sont variables initialement dt et $d\varphi$ et le trajet du photon obéît à

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 = 0$$

Et la vitesse de rotation du photon

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} \quad (3.1)}$$

Tant que $g_{tt} > 0$, $\frac{d\varphi}{dt}$ est positif ou négatif selon la direction dans laquelle il est émis, mais les deux valeurs absolues de cette vitesse sont différentes.

Lorsque $g_{00} = g_{tt} = 0$ il se produit un phénomène remarquable : l'une des 2 solutions devient nulle.

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_+ &= -2\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = 2\omega \\ \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_- &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)}$$

L'entrainement de l'orbite est si important que le photon semble immobile dans le système de coordonnées ! Cela signifie également qu'il ne peut pas y avoir sur la surface $g_{tt}(r, \theta) = 0$ de particule massive, ou observateur, immobile puisqu'aucune particule massive ne peut être immobile par rapport à un photon. Toute particule massive sera entraînée dans le sens de rotation de la source. C'est pour cette raison que la surface $g_{tt} = 0$ est appelée "**surface limite de stationnarité**".

A l'intérieur de cette surface $g_{tt} < 0$, il ne peut y avoir de particule gardant une position fixe (r, θ, φ) . Toutes les particules tournent dans le sens de rotation de la source.

Le fait qu'une particule ne peut pas rester fixe lorsque $g_{tt} < 0$ peut également se comprendre en observant que pour un observateur fixe sa quadri-vitesse $(u^t, 0, 0, 0)$ doit vérifier que $u^\mu u_\mu = c^2$, c'est-à-dire $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{tt} (u^t)^2 = c^2$. Ce qui est impossible si $g_{tt} < 0$.

Il y avait le même phénomène dans la métrique de Schwarzschild où $g_{tt} = c^2 \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)$, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ étant le rayon de Schwarzschild de l'étoile. Lorsque $r < r_s$ la particule est entraînée inéluctablement vers le centre d'attraction.

Pour un observateur A fixe situé à l'extérieur de la surface $g_{tt}(r, \theta) = 0$, un rayon lumineux issu d'un autre point B avec une longueur d'onde ν_B sera reçu avec une longueur d'onde $\nu_A = \left(\sqrt{\frac{g_{tt}(A)}{g_{tt}(B)}} \right) \nu_B$, décalée vers le rouge si $\frac{g_{tt}(A)}{g_{tt}(B)} > 1$. Pour des rayons lumineux émis depuis la surface $g_{tt} = 0$, le décalage vers le rouge est infini.

Le même phénomène existe dans la métrique de Schwarzschild. Si le rayon lumineux est émis d'un point situé en $r = r_s$, le décalage vers le rouge est infini.

4. Horizon des évènements

Section d'équation (système)

Dans la métrique de Schwarzschild la sphère $r = r_s$ est à la fois la surface où le décalage vers le rouge est infini et horizon des évènements, aucun rayon lumineux ne peut sortir d'un point situé à l'intérieur de cette sphère.

Il n'en est pas de même dans d'autres métriques.

Considérons une 3-surface du genre lumière, c'est-à-dire une surface dont la normale est un vecteur du genre lumière, dans un espace-temps quelconque d'équation $f(x^\mu) = 0$. La normale à cette surface est donnée par le 4-gradient

$$n_\nu = f_{;\nu} = \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$$

Par exemple dans la métrique de Schwarzschild $f(x^\mu) = r - r_s = x^1 - r_s = 0$. Les composantes de la normale sont $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right\} = \{0, 1, 0, 0\}$. Le carré de la norme de ce vecteur

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{11} (n_1)^2. \text{ Comme } g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = 0 \text{ il en résulte que } g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = n_\mu n^\mu = 0.$$

La normale est incluse dans la surface. En effet un déplacement sur la surface s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = n_\mu dx^\mu = 0$$

Dans le cas général d'une surface de genre lumière

$$\boxed{g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = n_\mu n^\mu = 0} \tag{4.1}$$

L'expression (4.1) peut également s'interpréter comme le produit scalaire du vecteur normal à la surface par lui-même. Ce produit scalaire étant nul, le vecteur est perpendiculaire à la normale et donc dans le plan tangent à la surface.

En tout point de la 3-surface nulle, le cône de lumière est tangent à la surface. Et par conséquent les lignes d'univers dirigées vers le futur sont situées d'un côté de la surface et ne

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

peuvent pas la traverser. Elles ne peuvent aller que dans une seule direction. Cette surface est donc un "**horizon des évènements**".

Dans le cas d'un espace-temps axisymétrique, l'équation de la 3-surface nulle est

$$f(r, \theta) = 0 \tag{4.2}$$

La condition (4.1) s'écrit :

$$\boxed{g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0} \tag{4.3}$$

Et pour la métrique , c'est-à-dire

$$g_{tt} = A - B\omega^2, \quad g_{t\phi} = B\omega, \quad g_{\phi\phi} = -B, \quad g_{rr} = -C, \quad g_{\theta\theta} = -D,$$

la condition (4.3) se réduit à

$$\boxed{g^{rr} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 = 0} \tag{4.4}$$

On peut choisir les coordonnées r et θ de façon à ce que l'équation de la surface s'écrive $f(r) = 0$. Dans ce cas l'équation (4.4) se réduit à

$$g^{rr} \left(\frac{d}{dr} f(r) \right)^2 = 0$$

Un horizon des évènements est présent si $g^{rr} = 0$ ou, de façon équivalente, si $g_{rr} = \infty$.

Dans la métrique de Schwarzschild l'horizon des évènements correspondait à

$$g^{rr} = \left(1 - \frac{r}{r_s} \right) = 0, \text{ c'est-à-dire } r = r_s.$$

5. La métrique de Kerr

Section d'équation (suivante)

La forme générale d'une métrique axisymétrique statique a été donnée par les équations (1.1)

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{03} dt d\phi + g_{33} (d\phi)^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 \tag{5.1}$$

et sa forme équivalente (1.4)

$$ds^2 = A dt^2 - B(d\phi - \omega t)^2 - C dr^2 - D d\theta^2 \tag{5.2}$$

Toutes les composantes du tenseur métrique ne dépendent que des variables r et θ .

La méthode pour déterminer les valeurs des composantes est analogue à la méthode utilisée pour déterminer les composantes de la métrique de Schwarzschild :

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

- calculer les composantes $R_{\mu\nu}$ du tenseur de Ricci.
- résoudre les équations d'Einstein dans le vide, c'est-à-dire en dehors de la masse centrale attirante dans le vide, $R_{\mu\nu} = 0$.

Pour décrire la géométrie d'un trou noir en rotation il faut ajouter des conditions supplémentaires : la géométrie de Kerr tend vers la géométrie de Schwarzschild lorsque $r \rightarrow \infty$.

En posant

$$\mu = \frac{GM}{c^2}, \quad a = \frac{J}{Mc} \quad \text{et} \quad r_s = \frac{2GM}{c^2} = 2\mu \quad (5.3)$$

J est le moment cinétique du trou noir et M sa masse.

Les calculs aboutissent à

5.1. Composantes du tenseur métrique

$$\begin{aligned} g_{tt} &= c^2 \left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2} \right), \quad g_{t\varphi} = \frac{2r_s a r \sin^2 \theta}{\rho^2} c dt d\varphi, \\ g_{\varphi\varphi} &= - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2 \sin^2 \theta^2}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \\ g_{rr} &= -\frac{\rho^2}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = -\rho^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Les composantes $g^{\mu\nu}$ sont :

$$\begin{aligned} g^{tt} &= \frac{\Sigma^2}{c^2 \rho^2 \Delta}, \quad g^{t\varphi} = \frac{r_s r a}{c \rho^2 \Delta}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{a^2 \sin^2 \theta - \Delta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \\ g^{rr} &= -\frac{\Delta}{\rho^2}, \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{\rho^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les fonctions ρ^2 et Δ sont définies :

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ \Delta &= r^2 - r_s r + a^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.2. Première forme de la métrique

C'est la forme connue sous le nom de **forme de Boyer-Lindquist** de la métrique déduites des résultats (5.4)

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{2r_s a r \sin^2 \theta}{\rho^2} c dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2r_s r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.7)$$

Les coordonnées (t, r, θ, φ) sont les **coordonnées de Boyer-Lindquist**.

5.3. Deuxième forme

Il s'agit d'une réécriture(5.7) de la métrique. On définit la fonction

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (5.8)$$

La nouvelle forme :

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} c^2 dt^2 + \frac{2r_s a r \sin^2 \theta}{\rho^2} c dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi^2 \quad (5.9)$$

Cette écriture peut à nouveau être réécrite sous une forme plus suggestive d'un corps en rotation :

$$ds^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2} c^2 dt^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} (d\varphi - \omega dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (5.10)$$

6. Limites de la métrique de Kerr

Si on fait tendre vers zéro la vitesse de rotation ($a \rightarrow 0$), la métrique de Kerr doit se confondre avec la métrique de Schwarzschild. Lorsque $a \rightarrow 0$, $\rho^2 \rightarrow r^2$ et $\Delta \rightarrow r(r - r_s)$. La

métrique (5.7) tend vers $ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{r^2}{r(r - r_s)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ qui est la métrique de Schwarzschild.

Dans la métrique de Kerr les 2-surfaces $(t = C^{te}, r = R)$ ne sont pas des sphères. La métrique (5.10) devient, dans ce cas,

$$ds^2 = - \left[\left(R^2 + a^2 \cos^2 \theta \right)^2 d\theta^2 + \left(R^2 + a^2 + \frac{2r_s R a^2 \sin^2 \theta}{\left(R^2 + a^2 \cos^2 \theta \right)^2} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]$$

Cette métrique entre crochets n'est pas la métrique d'une sphère.

Si la masse tend vers zéro $r_s \rightarrow 0$ et la métrique (5.7) devient

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left[\frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (6.1)$$

La métrique entre crochets, indépendante de φ , est la métrique d'une surface de révolution.

Pour une valeur donnée de r , dans le plan $\varphi = C^{te}$, la métrique entre crochets devient la métrique d'une courbe située dans un plan :

$$ds^2 = (r^2 + a^2) \cos^2 \theta d\theta^2 \quad (6.2)$$

C'est la métrique d'une ellipse, dans un plan euclidien. Si $z = \alpha \cos \theta$, $x = \beta \sin \theta$, la métrique de cette ellipse est

$$ds^2 = (\alpha^2 \sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 = [\alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \cos^2 \theta] d\theta^2$$

qui s'identifie à la métrique (6.2) avec $\alpha^2 = r^2$, $\beta^2 - \alpha^2 = a^2 \rightarrow \beta^2 = r^2 + a^2$. La métrique (6.2) est la métrique de l'ellipse

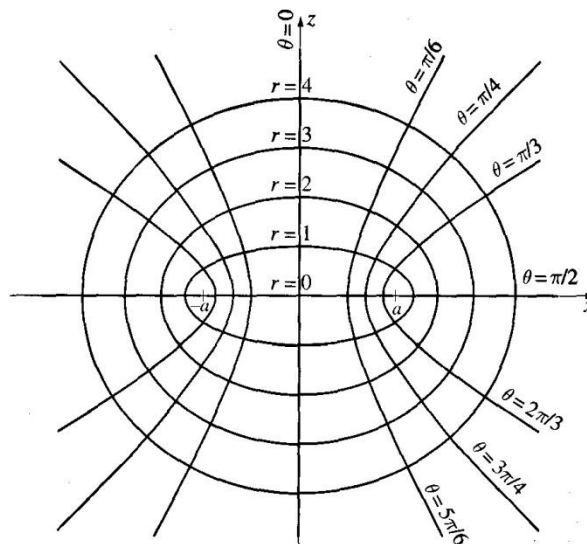
$$\frac{x^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} - 1 = 0$$

et la surface de révolution, autour de l'axe des z, correspondante est l'ellipsoïde

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} - 1 = 0 \quad (6.3)$$

Cette ellipsoïde se paramètre :

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (6.4)$$



Plan $\varphi = 0$

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

Lorsque $r = 0$, l'ellipsoïde se réduit à un disque plan de rayon a .

Les surfaces $\theta = C^{te}$ sont les hyperboloïdes de révolution, en éliminant r^2 et φ des équations (6.4) :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \sin^2 \theta} - \frac{z^2}{a^2 \cos^2 \theta} = 1$$

Se rappeler que ces ellipsoïdes et hyperboloïdes ne sont valables qu'en l'absence de masse, et donc ne sont pas valable pour le trou noir de Kerr.

7. Structure d'un trou noir de Kerr

Section d'équation (suivante)

7.1. Singularités et horizons

La métrique de Boyer-Lindquist est apparemment singulière lorsque $\rho^2 = 0$ et lorsque $\Delta = r^2 - r_s r + a^2 = 0$. Comme pour la métrique de Schwarzschild le calcul de $A = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ montre que la seule singularité intrinsèque se situe en $\rho = 0$.

Comme $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, la singularité se trouve en

$$\boxed{r = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}} \tag{7.1}$$

C'est le bord externe du disque $r = 0$.

L'horizon des évènement dans la métrique de Kerr apparait lorsque la surface $f(r)$ est du genre lumière et qu'elle correspond à $g_{rr} = -\frac{\rho^2}{\Delta} = \infty \rightarrow \Delta = 0$.

$r^2 - r_s r + a^2 = 0$ pour 2 valeurs de r :

$$\boxed{r_{\pm} = \frac{r_s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 - a^2}} \tag{7.2}$$

il y a, dans la métrique de Kerr, 2 horizons des évènement. On retrouve, lorsque $a \rightarrow 0$ que dans la métrique de Schwarzschild ces 2 surfaces sont la surface de la sphère $r = r_s$ et le point $r = 0$.

Les surfaces, horizons des évènements, ont évidemment une symétrie de révolution, mais ce ne sont pas des sphères.

$$d\sigma^2 = \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi^2$$

où $(r_{\pm}^2 + a^2) = r_s r_{\pm}$ et $\Sigma^2 = (r_{\pm}^2 + a^2)^2 - a\Delta \sin^2 \theta = (r_{\pm}^2 + a^2)^2 = (r_s r_{\pm})^2$ soit

$$\boxed{d\sigma^2 = (r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \left(\frac{r_s r_{\pm}}{r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta d\varphi^2} \quad (7.3)$$

La surface externe des horizons ($r = r_+$) est une surface que de l'extérieur vers l'intérieur. C'est la surface extérieure d'un trou noir, comme la surface $r = r_s$ l'était dans la métrique de Schwarzschild.

Les surfaces horizons des évènements, plongées dans un espace à 3 dimensions ressemblent à des ellipsoïdes aplatis au sommet.

Dans la métrique de Kerr, on peut définir 3 régions

- La région I, $r_+ < r$
- La région II, $r_- < r < r_+$
- La région III, $r < r_-$

Toutes les valeurs de la masse M ou $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, du moment cinétique J ou $a = \frac{J}{Mc}$ ne

conduisent pas à un trou noir. Le calcul des horizons (7.2) $r_{\pm} = \frac{r_s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 - a^2}$ montre qu'il n'y

a d'horizons des évènements que si $|a| < \frac{r_s}{2}$ soit $J < \frac{GM^2}{c}$. Lorsque $a^2 = \left(\frac{r_s}{2}\right)^2$ les 2 horizons

se confondent en $r_- = r_+ = \frac{r_s}{2}$.

Si $|a| > \frac{r_s}{2}$, la seule singularité se trouve au centre $\rho = 0$, la singularité annulaire, visible depuis le monde extérieur.

7.2. Surfaces limites de stationnarité

Comme il a été vu au chapitre 3, dans un espace-temps axisymétrique statique la condition $g_{tt} = 0$ définit une surface qui est à la fois une limite de stationnarité et une surface de décalage infini vers le rouge. Dans la métrique de Kerr

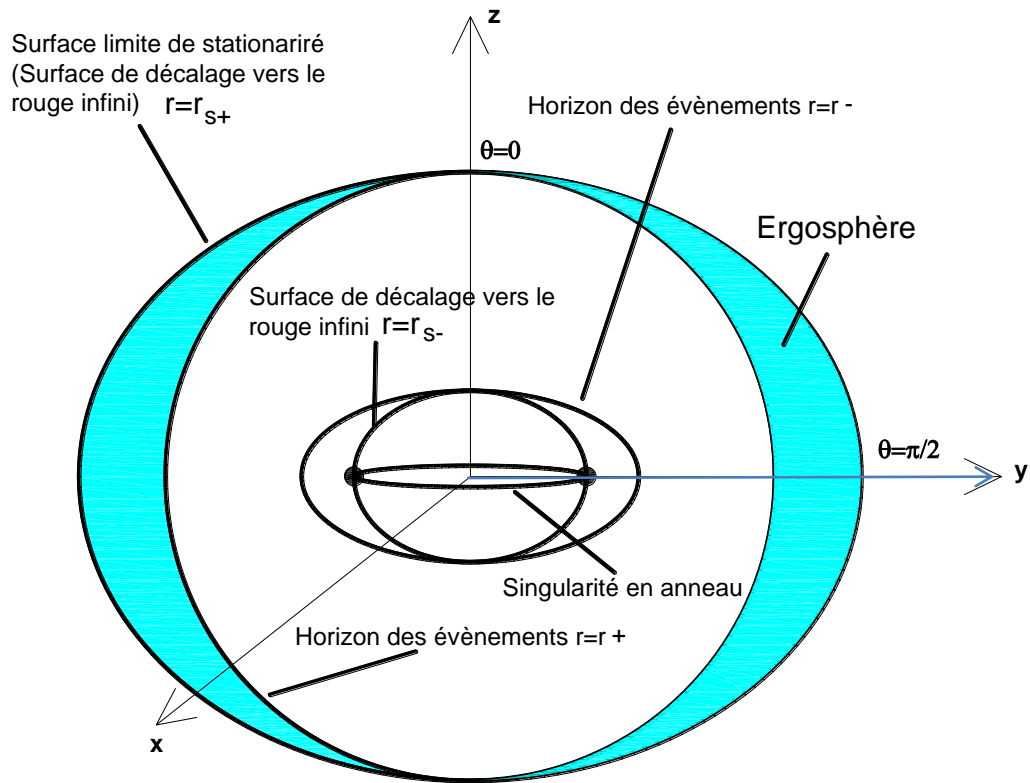
$$g_{tt} = c^2 \left(1 - \frac{r_s r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) = c^2 \frac{r^2 - r r_s + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$$

Les solutions de $g_{tt} = 0$ définissent 2 surfaces :

$$\boxed{r s_{\pm} = \frac{r_s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 - a^2 \cos^2 \theta}} \quad (7.4)$$

Les 2 surfaces sont des surfaces de révolution, mais ce ne sont pas des sphères. Ce sont, comme les surfaces horizons des évènements, des ellipsoïdes aplatis au sommet.

----- Trou noir de Kerr -----



Sont représentées sur la figure la coupe des 4 surfaces

Limite extérieure de stationnarité	$rs_+ = (r_s/2) + \sqrt{(r_s/2)^2 - a^2 \cos^2 \theta}$
Horizon extérieur des évènements	$r_+ = (r_s/2) + \sqrt{(r_s/2)^2 - a^2}$
Horizon intérieur des évènements	$r_- = (r_s/2) - \sqrt{(r_s/2)^2 - a^2}$
Limite intérieure de stationnarité	$rs_- = (r_s/2) - \sqrt{(r_s/2)^2 - a^2 \cos^2 \theta}$

On voit que

$$rs_- \leq r_- < r_+ \leq rs_+ \quad (7.5)$$

Lorsque $\theta = 0$:

- $rs_+ = r_+ = (r_s/2) + \sqrt{(r_s/2)^2 - a^2}$, les 2 surfaces sont tangentes
- et $r_- = rs_- = (r_s/2) - \sqrt{(r_s/2)^2 - a^2}$, les 2 surfaces sont tangentes

Dans le plan équatorial, $\theta = \pi/2$, $rs_- = 0$. La limite intérieure des évènements coïncide avec la singularité annulaire.

Entre la surface extérieure de limite de stationnarité et la surface extérieure d'horizon des évènements existe une région intermédiaire, l'**ergorégion** ou ergosphère.

8. Ergorégion

Section d'équation (survivoir)

Dans cette région $g_{tt} < 0$ et une particule peut s'en échapper. cette région n'existe pas dans la métrique de Schwarzschild où la région où $g_{tt} < 0$ est située à l'intérieur de l'horizon des évènements.

Penrose a montré qu'il était possible d'extraire de l'énergie d'un trou noir en rotation grâce à son ergorégion.

Comme il a été vu au chapitre 3, en chaque point de cette région, un observateur ne peut y avoir de coordonnées (r, θ, φ) fixes. Sa quadri-vitesse n'a que 2 composantes non nulles u^t et u^φ .

Sachant que la vitesse de rotation $\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^\varphi}{u^t}$, $[u^\mu] = [u^t, 0, 0, u^\varphi]$ peut s'écrire

$$\boxed{[u^\mu] = u^t [1, 0, 0, \Omega]} \quad (8.1)$$

Comme $u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2$

$$\boxed{g_{tt} (u^t)^2 + 2g_{t\varphi} u^t u^\varphi + g_{\varphi\varphi} (u^\varphi)^2 = (u^t)^2 [g_{tt} + 2g_{t\varphi} \Omega + g_{\varphi\varphi} \Omega^2] = c^2} \quad (8.2)$$

Pour que cette relation soit possible, il faut que le terme entre crochets $f(\Omega)$ soit positif.

$f(\Omega) = 0$ a 2 racines, comme $g_{\varphi\varphi} = -\left(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta$ est négatif il faut que Ω

soit compris entre ces 2 racines :

$$\Omega_{\pm} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}$$

D'après l'expression (5.10) $ds^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2} c^2 dt^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} (d\varphi - \omega dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2$,

$\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = -\omega$ et

$$\boxed{\Omega_{\pm} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}} \quad (8.3)$$

Sur la surface externe de l'ergorégion, $g_{tt} = 0$, il y a 2 vitesses limites de rotation, $\Omega_- = 0$ et $\Omega_+ = 2\omega$. A l'intérieur de la région $g_{tt} < 0$ et $(g_{tt}/g_{\varphi\varphi}) > 0$, les 2 valeurs Ω_- et Ω_+ sont positives. L'observateur tourne obligatoirement dans le même sens que le trou noir.

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

A l'extérieur de l'ergorégion $g_{tt} > 0$, et $(g_{tt}/g_{\varphi\varphi}) < 0$, la valeur Ω_- est négative.

Sur la surface interne de l'ergorégion, c'est-à-dire la surface externe de l'horizon extérieur

des évènements, $r_+ = (r_s/2) + \sqrt{(r_s/2)^2 - a^2}$, le calcul montre que $\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}} = 0$ et

$$\boxed{\Omega_H = \Omega(rs_+, \theta)_\pm = \omega} \quad (8.4)$$

Depuis la surface extérieure à la surface intérieure de l'ergorégion l'écart entre les valeurs extrêmes possibles Ω_+ et Ω_- se réduit de 2ω à 0. Cette valeur Ω_H est la valeur maximale possible de la vitesse de rotation de l'observateur. Elle est égale à la vitesse de rotation du trou noir.

9. Géodésiques dans le plan équatorial

Section d'équation (parabole)

9.1. Cas général

Dans le cas général les géodésiques ne sont pas des courbes situées dans un plan. La recherche de ces géodésiques est plus compliquée que dans le cas de la métrique de Schwarzschild.

On peut montrer que si une particule est dans le plan équatorial avec une vitesse initiale u^θ nulle, elle reste dans le plan équatorial. Les calculs seront faits dans ce cas, $\theta = \pi/2$. La métrique de Kerr (5.7)

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{2r_s a r \sin^2 \theta}{\rho^2} c dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2r_s r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Avec $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = r^2$ devient

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{2r_s a}{r} c dt d\varphi - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2}{r}\right) d\varphi^2} \quad (9.1)$$

Les composantes $g^{\mu\nu}$:

$$\boxed{g^{tt} = \frac{1}{c^2 \Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2}{r}\right), g^{t\varphi} = \frac{r_s a}{c r \Delta}, g^{rr} = -\frac{\Delta}{r^2}, g^{\varphi\varphi} = -\frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \quad (9.2)$$

Pour rechercher les géodésiques, on utilise le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \text{ et les équations } \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0.$$

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

Comme les $g_{\mu\nu}$ ne sont fonctions que de r et θ , $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$, et donc

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = kc^2, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -h, \quad k \text{ et } h \text{ étant des constantes, } p_t, p_\varphi \text{ les}$$

composantes du tenseur impulsion-énergie.

$$\boxed{p_t = g_{tt}\dot{t} + g_{t\varphi}\dot{\varphi} = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} + \frac{r_s a c}{r} \dot{\varphi} = kc^2} \quad (9.3)$$

$$\boxed{p_\varphi = g_{t\varphi}\dot{t} + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} = \frac{r_s a c}{r} \dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2}{r}\right) \dot{\varphi} = -h} \quad (9.4)$$

Les constantes k et h ont été définies de façon à coïncider, lorsque $a \rightarrow 0$, avec celles qui ont été introduites dans l'étude de la métrique de Schwarzschild.

Le système d'équations (9.3) et (9.4)

$$\begin{bmatrix} g_{tt} & g_{t\varphi} \\ g_{t\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{t} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} kc^2 \\ -h \end{Bmatrix}$$

se résout facilement en remarquant que $\left(g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2\right) = -c^2\Delta$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2}{r} \right) k - \frac{r_s a}{c r} h \right] \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{r_s a c}{r} k + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) h \right] \end{aligned}} \quad (9.5)$$

Le calcul de \dot{r} s'obtient en exprimant que la norme $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ du quadrivecteur énergie-impulsion se conserve le long de la géodésique : $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \varepsilon^2$, $\varepsilon^2 = c^2$ pour une particule massive de masse unitaire et $\varepsilon^2 = 0$ pour un photon.

$$g^{tt} (p_t)^2 + 2g^{t\varphi} p_t p_\varphi + g^{\varphi\varphi} (p_\varphi)^2 + g^{rr} (p_r)^2 = \varepsilon^2 \quad (9.6)$$

Sachant que $p_t = kc^2$, $p_\varphi = -h$, $p_r = g_{rr}\dot{r}$ et que $g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}}$, l'équation (9.6) devient

$$g^{tt} k^2 c^4 - 2g^{t\varphi} h + g^{\varphi\varphi} h^2 + \frac{1}{g^{rr}} \dot{r}^2 = \varepsilon^2$$

soit :

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

$$\dot{r}^2 = g^{rr} (\varepsilon^2 - g^{tt} k^2 c^4 + 2g^{t\varphi} c^2 kh - g^{\varphi\varphi} h^2) \quad (9.7)$$

En remplaçant les $g^{\mu\nu}$ par leurs expressions (9.2) :

$$\dot{r}^2 = c^2 k^2 - \varepsilon^2 + \frac{r_s}{r} \varepsilon^2 + \frac{a^2 (c^2 k^2 - \varepsilon^2) - h^2}{r^2} + \frac{r_s (h - ack)^2}{r^3} \quad (9.8)$$

Cette équation différentielle du premier ordre permet de calculer les trajectoires équatoriales de particules massives, $\varepsilon^2 = c^2$ ou des photons, $\varepsilon^2 = 0$.

En faisant $a = 0$, l'équation (9.8) devient identique à l'équation correspondante de la métrique de Schwarzschild.

9.2. Particules massives

Pour les particules massives

$$\dot{r}^2 = c^2 (k^2 - 1) + \frac{r_s}{r} + \frac{a^2 (c^2 k^2 - 1) - h^2}{r^2} + \frac{r_s (h - ack)^2}{r^3} \quad (9.9)$$

L'équation (9.9) peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r; h, k) = \frac{1}{2} c^2 (k^2 - 1) \quad (9.10)$$

où

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \frac{r_s c^2}{r} + \frac{h^2 - a^2 c^2 (k^2 - 1)}{2r^2} - \frac{1}{2} \frac{r_s (h - ack)^2}{r^3} \quad (9.11)$$

Comme dans la métrique de Schwarzschild, il y a trois termes. Le premier d'attraction, le second de répulsion, comme une force centrifuge, et le troisième d'attraction qui devient important lorsque r devient petit.

La trajectoire se détermine en résolvant les équations différentielles

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{r_s a c}{r} k + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) h \right] \quad (9.12)$$

$$\dot{r} = \sqrt{c^2 (k^2 - 1) + \frac{r_s}{r} + \frac{a^2 (c^2 k^2 - 1) - h^2}{r^2} + \frac{r_s (h - ack)^2}{r^3}}$$

Il y a un paramètre de plus que dans la métrique de Schwarzschild, mais la méthode de calcul par approximations, Runge-Kutta par exemple, reste la même.

9.3. Particules massives sans moment cinétique

Une particule massive en chute libre vers le trou noir n'ayant pas de moment cinétique par rapport à, celui-ci $h = 0$. Si, de plus, on suppose qu'elle par de l'infini $k = 1$. Les équations pour les géodésiques se simplifient :

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2}{r} \right) \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{\Delta} \frac{r_s a c}{r} \\ \dot{r}^2 &= \frac{r_s c^2}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \rightarrow \dot{r} = -c \sqrt{\frac{r_s}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Les valeurs de \dot{t} et de $\dot{\phi}$ deviennent infinies sur les 2 surfaces *horizons des évènements* où $\Delta = 0$. Le rapport $\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{r_s a c}{r \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2}{r} \right)}$ reste fini.

A l'aide des équations (9.13) il est possible d'exprimer une variable en fonction d'une autre :

$$\frac{dx^\mu}{dx^\nu} = \frac{\dot{x}^\mu}{\dot{x}^\nu} \rightarrow dx^\mu = \frac{\dot{x}^\mu}{\dot{x}^\nu} dx^\nu \text{ ou } dx^\nu = \frac{\dot{x}^\nu}{\dot{x}^\mu} dx^\mu .$$

$$dt = -\frac{1}{\Delta} \frac{\left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2}{r} \right)}{\sqrt{c^2 \frac{r_s}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)}} dr, \quad d\phi = -\frac{\frac{1}{\Delta} \frac{r_s a}{r}}{\sqrt{\frac{r_s}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)}} dr \quad (9.14)$$

10. Mouvement circulaire équatoriale des particules massives

Section d'équation (suivante)

Si le mouvement est circulaire, $r = r_c$ et $\dot{r} = 0$.

Suivant l'équation (9.10) $\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r; h, k) = \frac{1}{2} c^2 (k^2 - 1)$,

$$\dot{r} = 0 \rightarrow V_{\text{eff}}(r_c; h, k) = \frac{1}{2} c^2 (k^2 - 1)$$

Les trajectoires circulaires, comme il a été vu dans la métrique de Schwarzschild, cette trajectoire correspond à un extrémum du potentiel V_{eff} : $\left(\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right)_{r=r_c} = 0$. D'après l'équation (9.11)

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \frac{r_s c^2}{r} + \frac{h^2 - a^2 c^2 (k^2 - 1)}{2r^2} - \frac{1}{2} \frac{r_s (h - ack)^2}{r^3} = \frac{1}{2} c^2 (k^2 - 1)$$

En changeant de variable $u = \frac{1}{r}$, cette équation devient

$$\boxed{-r_s c^2 u + \left[h^2 - a^2 c^2 (k^2 - 1) \right] u^2 - r_s (h - ack)^2 u^3 = c^2 (k^2 - 1)} \quad (10.1)$$

La deuxième équation permettant de déterminer h et k , s'obtient par

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{dV_{\text{eff}}}{du} \frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{dV_{\text{eff}}}{du} = 0$$

Comme $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_c^2} \neq 0$, l'équation se réduit à $\frac{dV_{\text{eff}}}{du} = 0$:

$$\boxed{-r_s c^2 + 2 \left[h^2 - a^2 c^2 (k^2 - 1) \right] u - 3r_s (h - ack)^2 u^2 = 0} \quad (10.2)$$

En développant

$$\begin{aligned} \left[h^2 - a^2 c^2 (k^2 - 1) \right] &= a^2 c^2 + (h - ack)(h + ack) \\ &= a^2 c^2 + (h - ack) \left[(h - ack) + 2ack \right] \end{aligned}$$

L'inconnu h n'apparaît que dans l'expression $(h - ack)$. En remplaçant l'inconnu h par une nouvelle inconnue $x = h - ack$, $\left[h^2 - a^2 c^2 (k^2 - 1) \right] = x^2 + 2ackx + a^2 c^2$ et les équations (10.1) et (10.2) deviennent

$$\boxed{-r_s c^2 u + (x^2 + 2ackx + a^2 c^2) u^2 - r_s x^2 u^3 = c^2 (k^2 - 1)} \quad (10.3)$$

$$\boxed{-r_s c^2 + 2(x^2 + 2ackx + a^2 c^2) u - 3r_s x^2 u^2 = 0} \quad (10.4)$$

En multipliant la première équation par 2, la seconde par $-u$ et en les ajoutant :

$$-r_s c^2 u + r_s x^2 u^3 = 2c^2 (k^2 - 1)$$

$$\boxed{c^2 k^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{2} u \right) + \frac{r_s}{2} x^2 u^3} \quad (10.5)$$

L'équation (10.4) se réécrit :

$$\boxed{2ackxu = \left(\frac{3}{2} r_s u - 1 \right) ux^2 - c^2 \left(a^2 u - \frac{r_s}{2} \right)} \quad (10.6)$$

L'inconnue k s'élimine en extrayant k de l'équation (10.6) et le reportant dans l'équation (10.5).

Ce qui donne une équation bicarrée en x^2 . Pour simplifier provisoirement les écritures, on remplacera $r_s/2$ par μ :

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[(3\mu u - 1)^2 - 4a^2 \mu u^3 \right] u^2 x^4 - 2c^2 u \left[(3\mu u - 1)(a^2 u - \mu) - 2ua^2 (\mu u - 1) \right] x^2 \\ &+ c^4 (a^2 u - \mu)^2 = 0 \end{aligned}} \quad (10.7)$$

Les solutions de cette équation bicarrées sont :

$$\boxed{(h - ack)^2 = x^2 = \frac{c^2 (a\sqrt{u} \pm \sqrt{\mu})^2}{u(1 - 3\mu u \mp 2a\sqrt{\mu u^3})}} \quad (10.8)$$

Les signes \pm correspondent à des orbites circulaires en rotation inverse et à des orbites circulaires en corotation.

Il faut choisir ensuite la racine de x^2 . Comme il a été vu avec les orbites circulaires de Schwarzschild, ces orbites ne sont pas obligatoirement stables. On peut démontrer que l'orbite stable est celle qui est associée à

$$\boxed{x = -\frac{c(a\sqrt{u} \pm \sqrt{\mu})}{\sqrt{u(1 - 3\mu u \mp 2a\sqrt{\mu u^3})}}} \quad (10.9)$$

Pour terminer le calcul des inconnues initiales k et h , en reportant cette valeur de x dans l'équation (10.5) :

$$\boxed{k = \frac{1 - 2\mu u \mp a\sqrt{\mu u^3}}{\sqrt{1 - 3\mu u \mp 2a\sqrt{\mu u^3}}}} \quad (10.10)$$

Et avec $h = x + ack$

$$\boxed{h = \mp \frac{c\sqrt{\mu}(1 + a^2 u^2 \pm 2a\sqrt{\mu u^3})}{\sqrt{u(1 - 3\mu u \mp 2a\sqrt{\mu u^3})}}} \quad (10.11)$$

Les valeurs calculées dans les orbites circulaires de Schwarzschild se retrouvent en faisant

$$a = 0 \text{ dans les 2 équations précédentes : } k_s = \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{\sqrt{1 - \frac{3r_s}{2r}}}, \quad h_s = cr \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \frac{r_s}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{3r_s}{2r}}}$$

11. Stabilité des orbites circulaires équatoriales

Section d'équation (solvable)

Lors de l'étude des trajectoires circulaires stables de Schwarzschild, il a été démontré que les trajectoires circulaires correspondaient aux valeurs de r donnant une valeur minimale au potentiel V_{eff} et que le rayon le plus faible était obtenu lorsque $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$ et que de plus en pour cette valeur de r la courbe $V_{\text{eff}}(r)$ présentait un point d'inflexion : $\frac{d^2 V_{\text{eff}}(r)}{dr^2} = 0$.

Aux contraintes étudiées dans le chapitre 10, il faut ajouter, en rappelant que $\frac{du}{dr} = -u^2$

- - - - Trou noir de Kerr - - - -

$$\frac{d_2 V_{\text{eff}}}{dr^2} = \left[\frac{d}{du} \left(\frac{dV_{\text{eff}}}{du} \frac{du}{dr} \right) \right] \frac{du}{dr} = \left[\frac{d}{du} \left(-u^2 \frac{dV_{\text{eff}}}{du} \right) \right] (-u^2)$$

ce qui donne $\frac{d_2 V_{\text{eff}}}{dr^2} = u^2 \left[2u \frac{dV_{\text{eff}}}{du} + u^2 \frac{d_2 V_{\text{eff}}}{du^2} \right]$. Au point où $\frac{dV_{\text{eff}}}{du} = 0$, l'équation

$\frac{d_2 V_{\text{eff}}(r)}{dr^2} = 0$ devient $\frac{d_2 V_{\text{eff}}}{du^2} = \frac{d}{du} \frac{dV_{\text{eff}}}{du} = 0$, en dérivant l'équation (10.4):

$$\boxed{(x^2 + 2ackx + a^2c^2) - 3r_s x^2 u = 0} \quad (11.1)$$

La valeur de u :

$$\boxed{u = \frac{x^2 + 2ackx + a^2c^2}{3r_s x^2} = \frac{h^2 - a^2c^2(k^2 - 1)}{3r_s x^2}} \quad (11.2)$$

En reprenant les valeurs de h , k et x^2 calculées au chapitre 10 :

$$1 - 3a^2u^2 - 3r_s u \mp 8ua\sqrt{\frac{r_s}{2}}u = 0$$

Et en remplaçant u par $1/r$:

$$\boxed{r^2 - 3r_s r - 3a^2 \mp 8a\sqrt{\frac{r_s}{2}}\sqrt{r} = 0} \quad (11.3)$$

C'est une équation du quatrième degrés en \sqrt{r} dont seules les 2 racines positives sont les valeurs des rayons minimaux des trajectoires circulaires des particules massives.

Lorsque $a = 0$, on retrouve la limite de Schwarzschild $r_{\text{mini}} = 3r_s$.

En posant $\rho = \frac{r}{r_s}$ et $\alpha = \frac{a}{r_s}$, l'équation (11.3) devient

$$\boxed{\rho^2 - 3\rho \mp \frac{8\alpha}{\sqrt{2}}\sqrt{\rho} - 3\alpha^2 = 0} \quad (11.4)$$

Les solutions de l'équation (11.4) ne sont pas très simples, mais pour le trou noir extrême lorsque $a = \frac{r_s}{2} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ et en posant $\varepsilon = \mp$:

$$\boxed{\rho^2 - 3\rho + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{\rho} - \frac{3}{4} = 0} \quad (11.5)$$

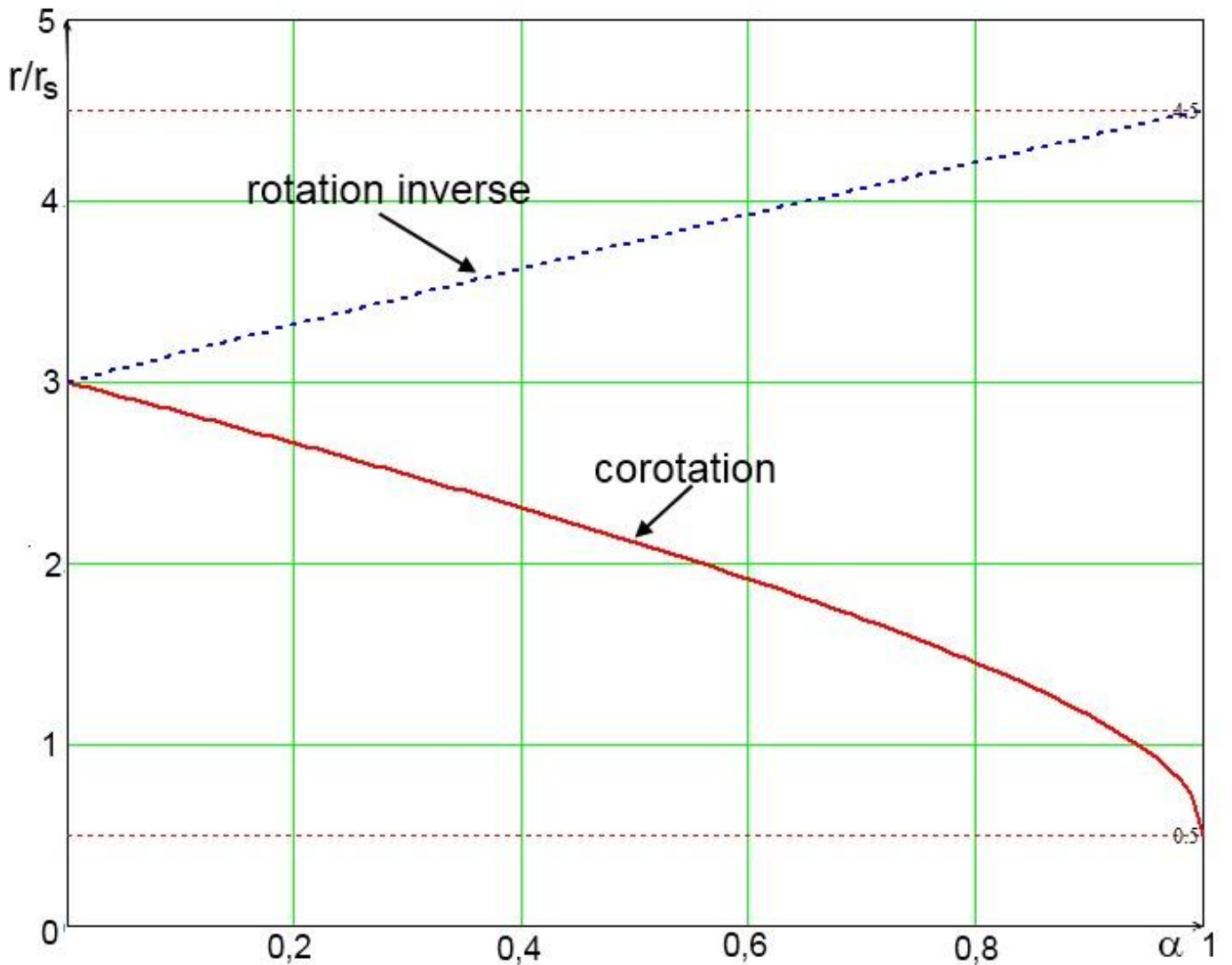
Lorsque $\varepsilon = 1$, particule en corotation, $\rho = \frac{1}{2}$, donc $r = \frac{r_s}{2}$ est une solution.

----- Trou noir de Kerr -----

Lorsque $\varepsilon = -1$, particule tournant en sens inverse du trou noir, une solution de (11.5) est $\rho = \frac{9}{2}$, donc $r = \frac{9}{2} r_s$ est une solution. Les rayons minimaux de stabilité des trajectoires circulaires de particules massives dans le plan équatorial sont :

Particules en corotation	$r = \frac{r_s}{2}$	(11.6)
Particules en rotation invers	$r = \frac{9}{2} r_s$	

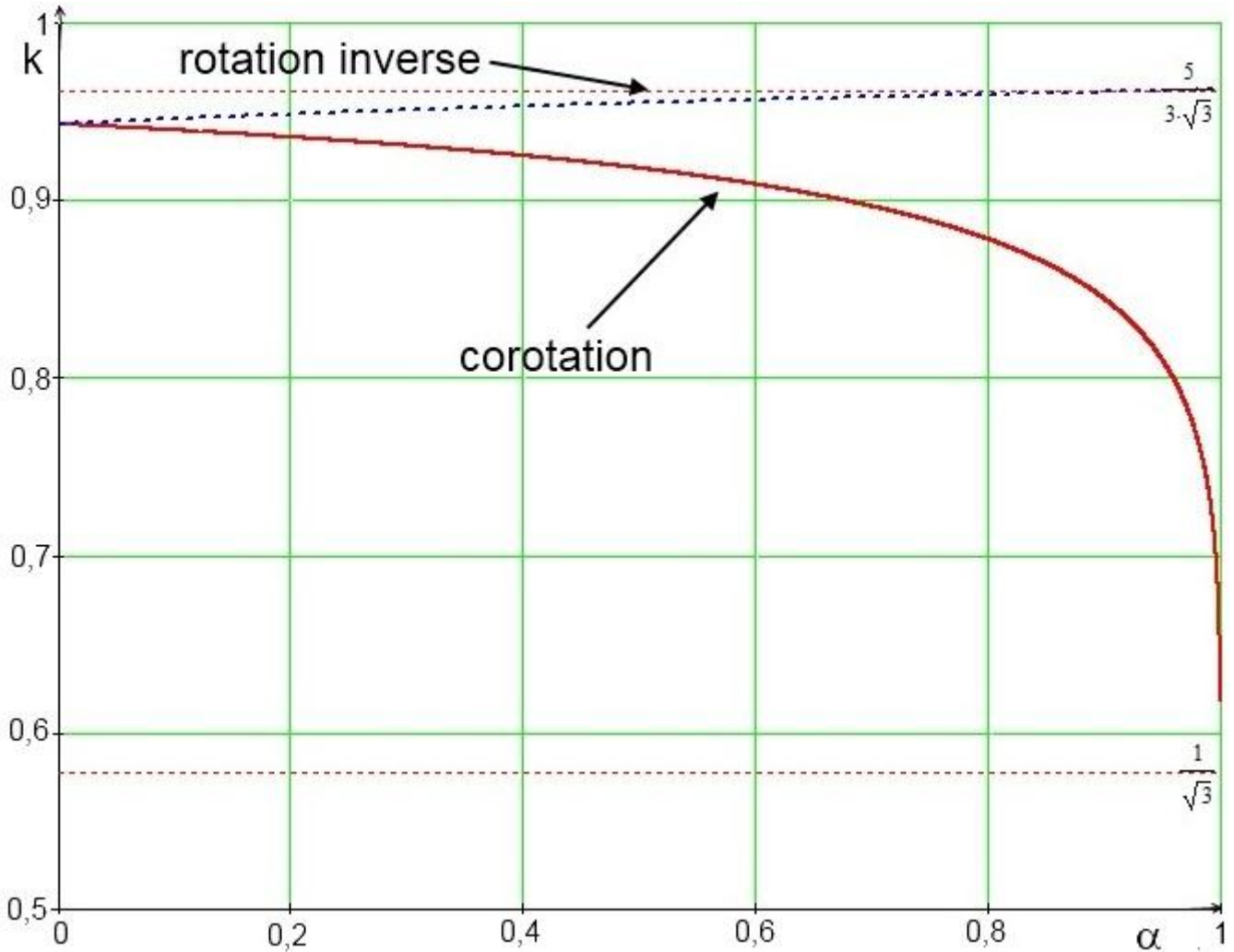
L'équation (11.4) permet d'étudier la variation des rayons limites lorsque $\frac{a}{r_s/2}$ varie :



Evolution des rayons minimaux de stabilité en fonction de a

----- Trou noir de Kerr -----

En reportant les valeurs des rayons minimaux, pour un a donné, dans l'équation(10.10) donnant la valeur de k on obtient la courbe :



Evolution du coefficient d'énergie k , en corotation et en rotation inverse, aux rayons limites de stabilité des trajectoires circulaires équatoriales lorsque le rapport $\alpha = a/(r_s/2)$ varie.

Pour les valeurs $r = a = r_s/2 = \mu$, en corotation, la formule (10.10) est indéterminée, elle est de la forme $0/0$. La limite est $1/\sqrt{3}$.

L'énergie de liaison de la particule est $(1 - k)$, elle serait dans le cas extrême en corotation, $a = r = r_s/2$, de $E_{\text{Liason}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 42\%$. Ce qui signifie qu'un disque d'accrétion autour d'un trou noir en rotation peut convertir presque 50% de sa matière sous forme de rayonnement.

Dans un trou noir plus réaliste, des calculs montrent que l'on atteint $\alpha = a/(r_s/2) = 0,998$. Pour cette valeur $k = 0,679$ et 32% de la matière est convertie en rayonnement. C'est environ 6 fois plus que pour un trou noir de Schwarzschild et 45 fois plus que l'énergie obtenue par fusion nucléaire d'une même quantité de matière. C'est cette énergie qui explique, aujourd'hui, le rayonnement des quasars.