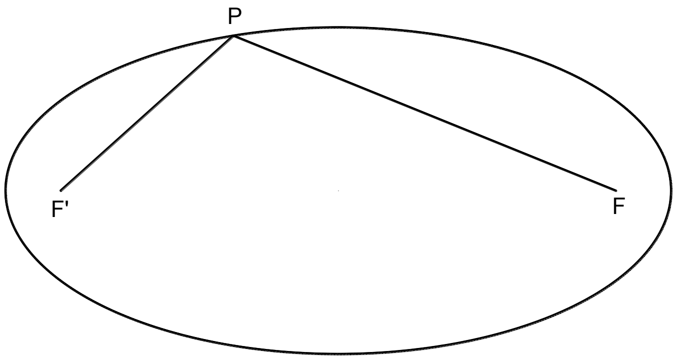
Le mouvement des planètes autour du soleil

1 – Préambule

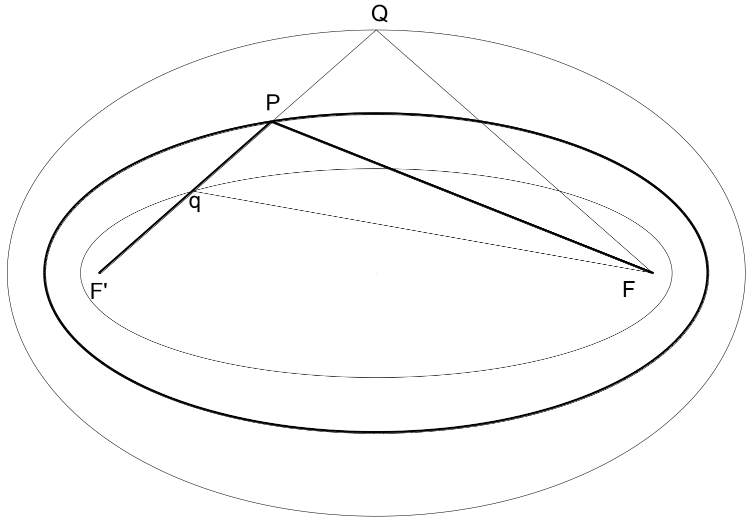
Newton a démontré que les orbites des planètes étaient des ellipses dont le soleil occupait l'un des foyers. Cette propriété avait été découverte par Kepler.

Pour faire sa démonstration Newton n'a utilisé que la géométrie. Suivre la démonstration de Newton n'est pas, semble-t-il, chose aisée. Richard FEYNMAN a réussi cette démonstration en n'utilisant que de la géométrie élémentaire. C'est un résumé du livre "Le mouvement des planètes autour du soleil" de Richard FEYNMAN qui est exposé ci-après.

2 – Une définition de l'ellipse.



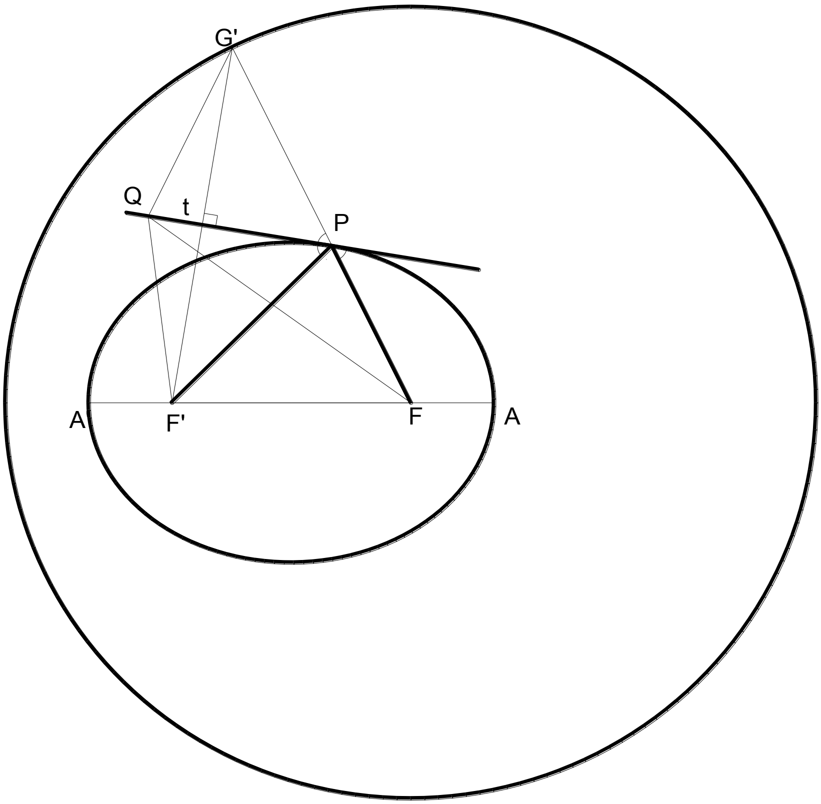
Les extrémités d'une ficelle de longueur donnée sont fixées en 2 points F et F'. L'ellipse peut être dessinée avec un crayon par exemple. La ficelle étant tendue, le point P décrit l'ellipse dont les foyers sont F et F'. En d'autres termes : l'ellipse est le lieu des points P du plan tels que $PF + PF' = 2a$.



Si on utilise une ficelle plus longue tous les points de la nouvelle ellipse de foyers F et F' sont à l'extérieur de la première ellipse. En effet, si Q est un point de cette ellipse, la droite QF' coupe la première ellipse en P. Si Q était à l'intérieur de la première ellipse il serait situé entre P et F', par exemple en q. Dans le triangle PqF, la somme des longueurs des côtés (Pq+Pf)>qF et donc [(Pq + qF')+PF] > (qF + qF'), c'est-à-dire (PF'+PF) < (qF + qF'), ce qui est contraire au fait que la ficelle est plus longue.

De même si la ficelle est raccourcie tous les points de cette troisième ellipse sont à l'intérieure de la première ellipse.

3 – Autre génération de l'ellipse – tangente à l'ellipse



On trace un cercle dont le centre est situé au foyer F et dont le rayon est égal à la longueur $2a$ de la ficelle. D'un point G' situé sur ce cercle on trace 2 droites GF et GF'. La médiatrice de GF' coupe la droite GF en un point P. P étant sur la médiatrice de F'G, les longueurs PG' et PF' sont égales :

$$PF + PF' = PF + PG' = FG' = 2a$$

Le point P décrit donc une ellipse de foyers F et F'.

Hors mis le point P, tous les points de la médiatrice de F'G' sont à l'extérieur de l'ellipse. Soit Q un point sur cette médiatrice. Si Q est un point situé sur cette médiatrice, la somme des longueurs (QF' + QF) > 2a. Q étant situé sur la médiatrice de F'G', QF' = QG' et (QF'+QF)=(QG'+QF). Dans le triangle FQG', la somme des longueurs des 2 côtés (QG'+QF) est supérieure à la longueur du troisième côté FG'=2a.

$$\left(QG' + QF\right) = \left(QF' + QF\right) > 2a$$

D'après ce qui a été établi précédemment, le point Q est à l'extérieur de l'ellipse. Tous les points de la médiatrice de F'G' sont à l'extérieur de l'ellipse sauf le point P. Cette médiatrice est donc tangente à l'ellipse au point P. Si cette droite était une sécante et non une tangente elle aurait en effet des points à l'intérieur de l'ellipse.

En examinant les angles autour du point P on vérifie que les 2 angles $QPF' = QPG'$, les 2 triangles QPG' et QPF' étant symétriques par rapport à la droite QP. Ces angles sont égaux à l'angle que fait la droite FG' avec la droite QP. Les droites FP et F'P font le même angle avec la tangente en P à l'ellipse.

Remarques

1 Propriété de la tangent à l'ellipse

On retrouve que la tangente à l'ellipse est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle FPF'

2 Théorème de FERMAT

Si un rayon lumineux part de F, se réfléchit sur la droite QP pour aboutir au point F', il passera par le point P de façon à ce que l'angle de réflexion soit égal à l'angle d'incidence. De ce fait il choisit le chemin le plus court pour aller de F à F' après une réflexion sur la droite tangente à l'ellipse en P. En effet s'il passait par un point autre que P, par exemple Q, le chemin serait plus long comme cela vient d'être démontré.

4 – La loi des aires

La deuxième loi de Kepler énonce que "Le mouvement de chaque planète est tel que le segment de droite reliant le soleil et la planète balaie des aires égales pendant des durées égales".

Pour la démonstration de cette loi lorsque le soleil exerce une force dirigée de la planète vers le soleil Newton a utilisé la figure suivante :

- - - - - - Le mouvement des planètes autour du soleil - - - - - -

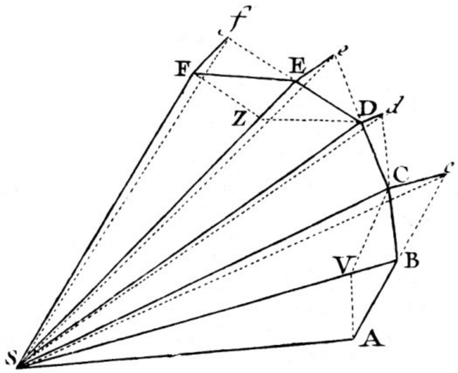


FIG. 12.

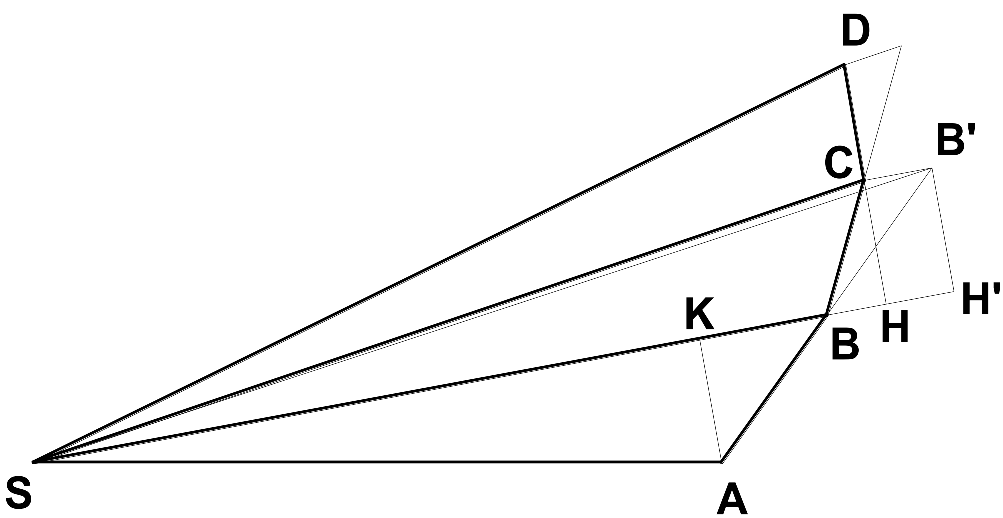
Cette figure est extraite de *PRINCIPIA Principes Mathématiques de la philosophie naturelle.* De NEWTON

Feynman a utilisé la même figure et le même raisonnement.

Les hypothèses sont :

1. Si aucune force ne s'exerce sur un corps il continue son mouvement en ligne droite à la même vitesse.
2. Si une force s'exerce le corps subit un déplacement dans la direction de la force appliquée. (Ce déplacement s'ajoute au déplacement explicité en 1).
3. La force est dirigée vers le soleil.

Nous raisonnerons sur la figure suivante qui détaille les 2 premiers déplacements :



La première approximation est que la planète se déplace suivant des segments de droite successifs. Ces segments peuvent être rendus aussi petits que l'on veut. A la limite la courbe décrite devient continue.

La deuxième approximation est que la force exercée par le soleil est dans la direction où se trouve le soleil au départ du segment : pendant le trajet AB la force est dans la direction AS, pendant le trajet BC elle est dans la direction BS, etc.

Les temps séparant les différents points de la courbe polygonale sont égaux.

Pendant le premier parcours AB l'aire balayée est l'aire du triangle SAB.

S'il n'y avait pas de force, le deuxième segment serait BB', dans le prolongement de AB avec de plus BB'=AB, puisque les vitesses et les temps sont égaux pour les 2 parcours.

La force dirigée dans la direction BS déplace le point B en C, parallèlement à SB.

De B' et de C on abaisse les perpendiculaires B'H' et CH sur la droite SB. Le quadrilatère CB'H'H est un rectangle, les côtés HH' et CB' sont parallèles et CH et B'H' leurs sont perpendiculaires.

De A on abaisse la perpendiculaire BK sur SB. Les 2 triangles rectangles AKB et H'BB' sont opposés par le sommet B et leurs hypoténuses AB=BB'. Ils sont égaux et

$$AK = B'H' = CH$$

L'aire du triangle SAB est égale au produit de la longueur du côté SB par la longueur de la hauteur AK

$$S_{SAB} = SB \times AK$$

L'aire du triangle SBC est égale au produit de la longueur du côté SB par la longueur de la hauteur CH $S_{SBC} = SB \times CH$

Et comme $AK = CH$

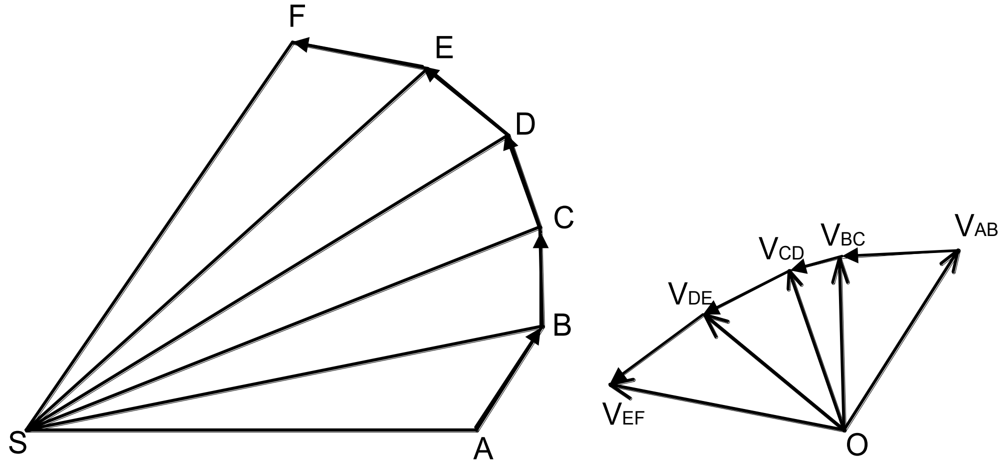
$$\boxed{S_{SAB} = S_{SBC}}$$

Ceci démontre la deuxième loi de Kepler.

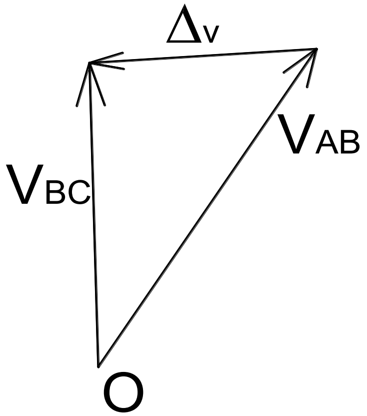
5 – Attraction proportionnelle à l'inverse du carré des distances

Pour démontrer que le soleil exerce une attraction inversement proportionnelle au carré des distances il faut étudier la variation de la vitesse de la planète au cours de sa révolution.

5.1 – Hodographe



Dans la figure ci-dessus sont représentés 2 tracés, celui de gauche est le même que celui qui a été employé par Newton (voir le chapitre 4 "La loi des aires"), il représente les points successifs qu'occupe la planète dans une suite d'intervalles de temps égaux. Comme les intervalles de temps sont égaux les longueurs des segments successifs AB, BC, CD, etc. sont proportionnels à la vitesse de la planète pendant le trajet entre ces points, par exemple $AB = kV_{AB},\ BC = kV_{BC},\ CD = kV_{CD}$.



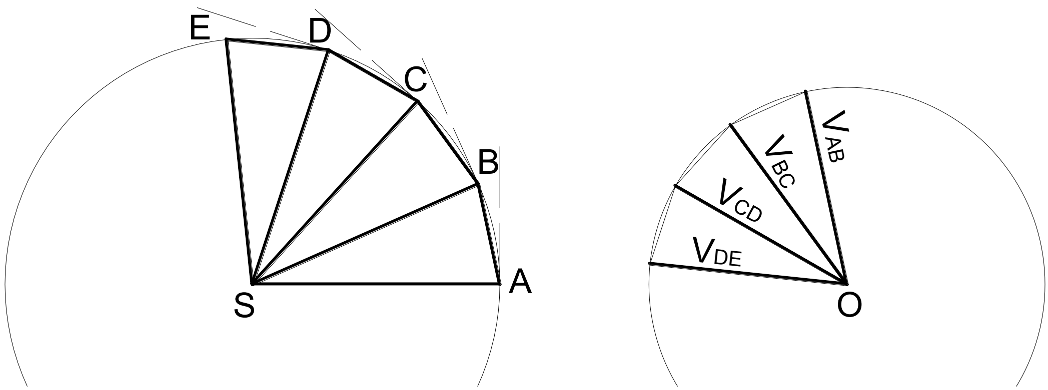
Le tracé de droite est obtenu en portant à partir d'un point fixe O des vecteurs proportionnels aux vitesses aux différents points de l'orbite de la planète : $\overrightarrow{Ov}_{AB} = k'\vec{v}_{AB} = kk'\overrightarrow{AB} = k''\overrightarrow{AB}$. La courbe ainsi obtenue est l'hodographe de la trajectoire de la planète.

Le vecteur $\overrightarrow{\Delta v}$ qui joint l'extrémité du vecteur $\vec{v}_{AB}$ à l'extémité du vecteur suivant $\vec{v}_{BC}$ est proportionnel à la force qui s'exerçait en A sur la planète, c'est comme ça qu'a été démontrée la loi des aires.

Lorsque la planète décrit son orbite elle revient, au bout de son temps de révolution T, à son point de départ. Sur l'hodographe, au bout du même temps T,le vecteur vitesse revient à sa position d'origine. L'hodographe est donc décrit avec la même période que l'orbite lui-même.

5.2 – Orbite particulière

Lorsque les 2 foyers se rapprochent et finissent par être confondus, l'ellipse devient un cercle. Les rayons SA, SB, SC, etc…étant égaux la vitesse de la planète sur son orbite est constante d'après la loi des aires.



Si le cercle que décrit la planète est divisé en n secteurs successifs d'angle $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$, le polygone de l'hodographe comportera également n secteurs dont les rayons successifs sont également séparés par le même angle α. En effet dans le cercle décrivant l'orbite, chacun des secteur est obtenu à partir du précédent par une rotation de centre S et d'angle α. BC est ainsi obtenu à partir de AB par une rotation de centre S et d'angle α. Et par conséquent il en est de même pour $\vec{v}_{BC} = k\,\overrightarrow{BC}$ à partir de $\vec{v}_{AB} = k\,\overrightarrow{AB}$, l'angle entre ces 2 vecteur est α. Le polygone que décrit l'hodographe est un polygone régulier à n côtés. Lorsque le nombre de côtés croit, le polygone temps vers un cercle.

- - - - - - Le mouvement des planètes autour du soleil - - - - - -

La force qui s'exerce en A sur la planète est proportionnelle à la différence des vecteurs-vitesses entre les 2 trajets successifs AB et BC divisée par le temps de parcours Δt. Sur l'hodographe ce rapport se traduit par la longueur du vecteur joignant les extrémités de 2 points successifs du polygone divisée par le même Δt.

Si R est le rayon de l'orbite, la vitesse de la planète est $v = \frac{2\pi R}{T}$. Si l'hodographe était tracé à l'échelle 1 son rayon serait égal à v. La distance entre 2 point successifs séparé par un angle α serait égale à $\approx v\alpha$, la force $F = K\frac{\Delta v}{\Delta t} = K\frac{\alpha v}{\Delta t} = K\frac{2\pi}{n}\frac{v}{\Delta t}$. Le temps séparant le passage de la planète entre 2 sommet successifs est $\Delta t = \frac{T}{n}$. Ce qui donne

$F = K\frac{2\pi}{n}v\left(\frac{1}{\frac{T}{n}}\right) = K2\pi\frac{v}{T}$. En remplaçant maintenant v par $\frac{2\pi R}{T}$:

$$F = K2\pi\frac{2\pi R}{T^2}$$

La troisième loi de Kepler dit que $\frac{R^3}{T^2} = C^{te} = C$ ou encore $\frac{R}{T^2} = \frac{C}{R^2}$.

En portant cette expression dans la calcul de la force, il reste $F = K\left(2\pi\right)^2 C\frac{1}{R^2}$, K et C étant des constantes

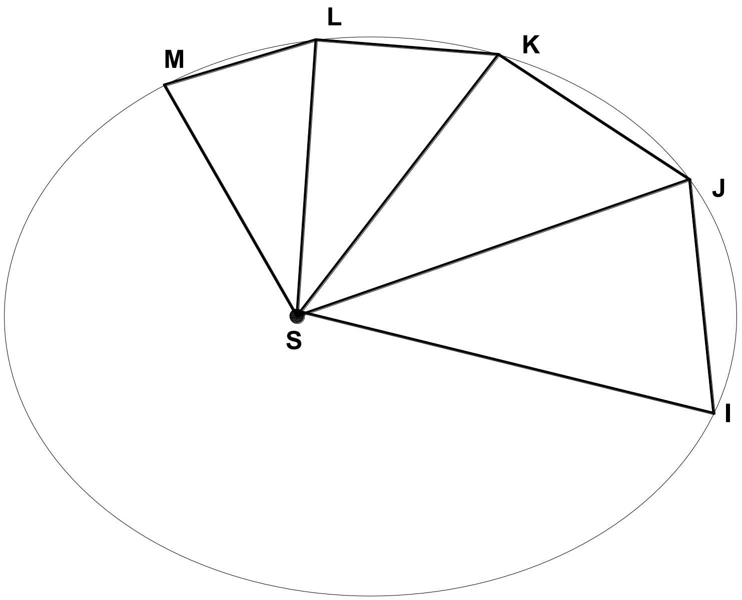
$$\boxed{F = \frac{K'}{R^2}}$$

La force qu'exerce le soleil sur la planète est inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

6 – Trajectoire de la planète

Il reste à démontrer que l'attraction inversement proportionnelle à la distance engendre une trajectoire elliptique, c'est-à-dire la première loi de Kepler.

La démonstration qu'en donne Feynman est différente de la solution donnée par Newton. Il semble d'ailleurs que peu de personne ait compris la démonstration donnée par Newton. Contrairement à Newton qui utilise des intervalles de temps égaux Feynman divise la l'orbite de la planète suivant des angles successifs égaux, un sommet de ces angles étant situé au centre du soleil.



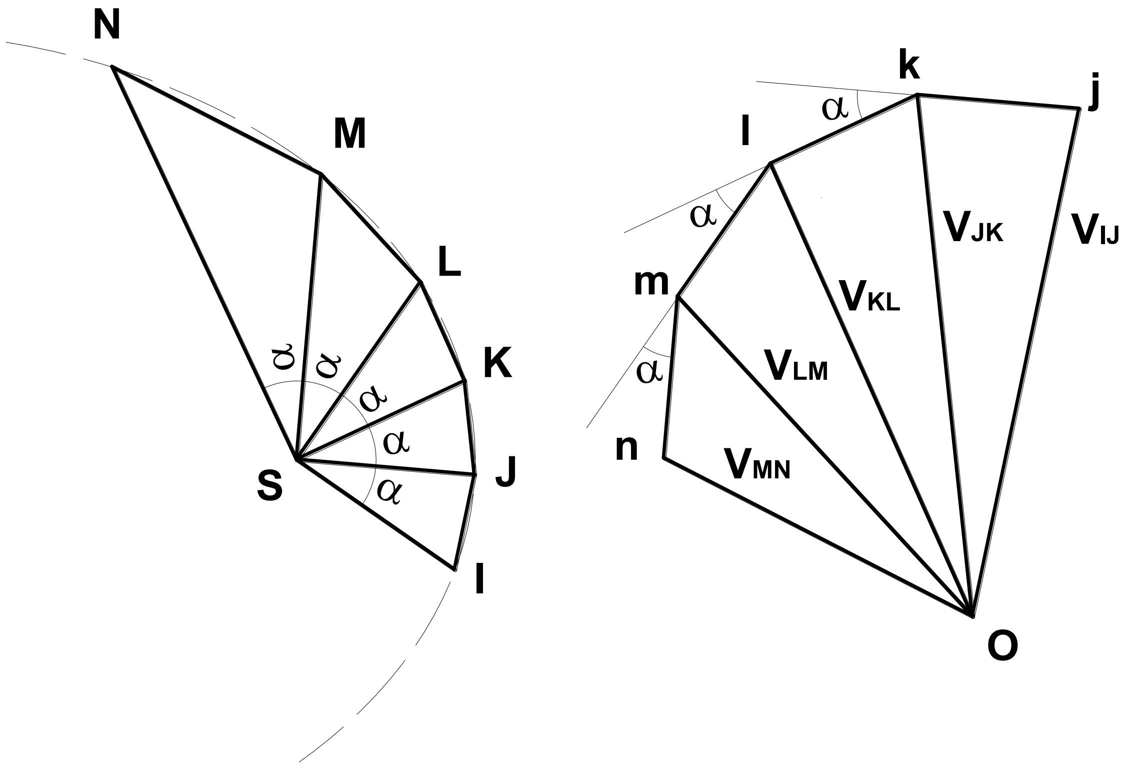
Les vecteurs-vitesses sont portés par les segments joignant les points successifs du polygone. Les vitesses ne sont plus proportionnelles aux longueurs des segments parce que les temps de parcours sont différents d'un segment à l'autre. Les angles entre les segments successifs SI, SJ, SK, etc…sont tous égaux à α .

Nous avons vu que la variation de vitesse entre un segment et le suivant, par exemple entre JK et KL, était dans la direction de la force appliquée au point K, proportionnelle à la force exercée par le soleil au point K et proportionnelle au temps de parcours : $\Delta\vec{v} = K\vec{F}\Delta t$. La force en K est inversement proportionnelle au carré de SK : $F_K = \dfrac{C}{SK^2}$. La surface balayée par le rayon vecteur est $\approx \alpha SK^2$. D'après la deuxième moi, de Kepler, le temps mis pour balayer la surface est proportionnel à la surface : $\Delta t = K'\alpha SK^2$ et

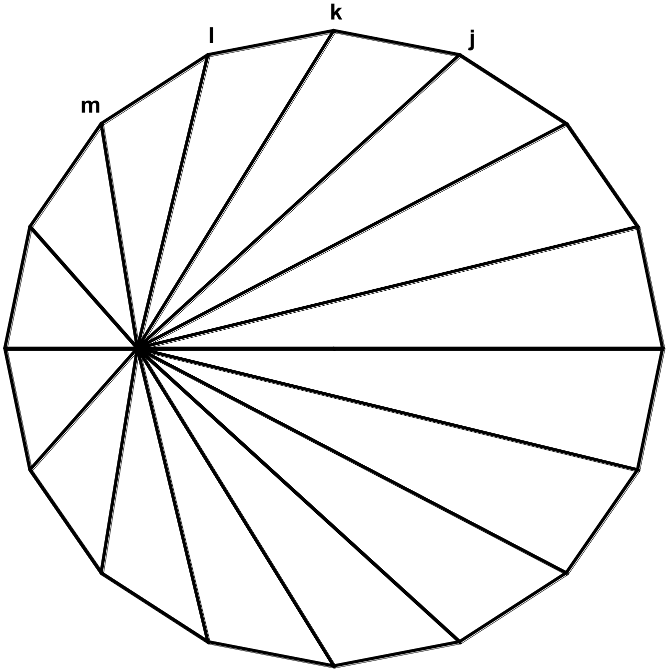
$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right| \approx K \frac{C}{SK^2} K'\alpha SK^2 = (KK'C)\alpha = K''\alpha$$

Ce vecteur $\overrightarrow{\Delta v}$ est dirigé dans la direction $\overrightarrow{KS}$.

On en déduit que les modules de tous les $\overrightarrow{\Delta v}$ sont égaux et que l'angle entre 2 $\overrightarrow{\Delta v}$ est égal à α, comme l'angle qui sépare 2 segments successifs partant du centre du soleil sur l'orbite de la planète.



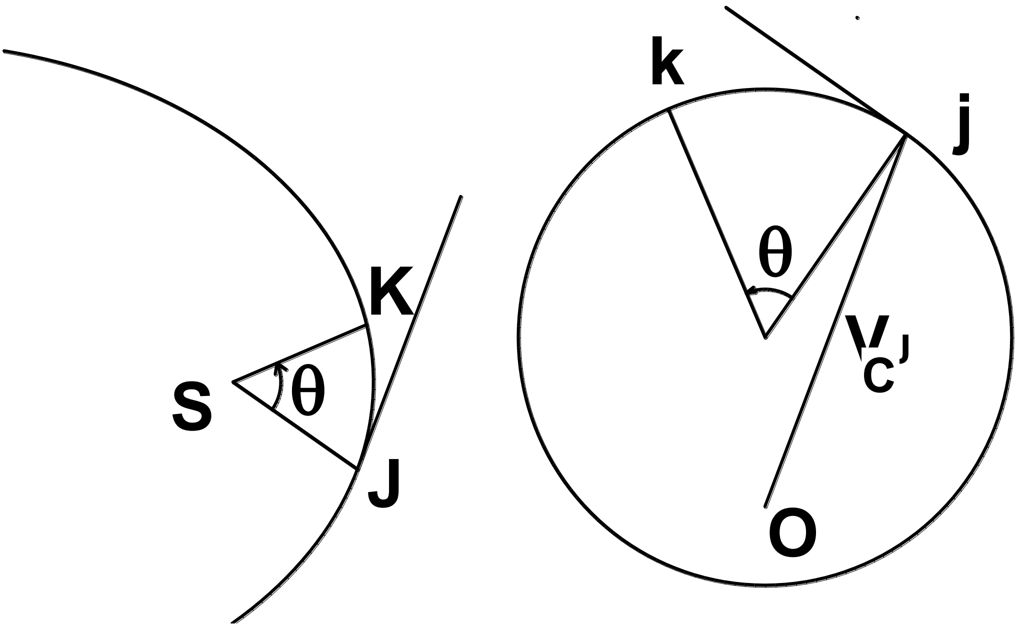
Les côtés successifs qui constituent le polygone de l'hodographe sont égaux et les angles que fait un côté avec le côté précédent est égal à α, le même que l'angle que font 2 rayons successifs reliant le centre du soleil au centre de la planète. Ce polygone est donc un polygone régulier :



Lorsque le nombre de côtés augmente l'hodographe tend vers un cercle. L'hodographe du mouvement d'une planète est un cercle.

Lorsque l'orbite est une courbe continue et l'hodographe un cercle :

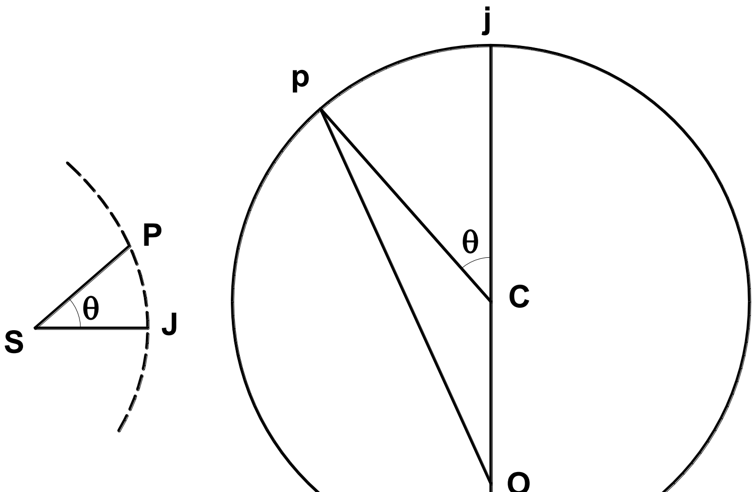
- la direction du segment jk devient la direction de la tangente au cercle au point j est parallèle, sur la courbe de l'orbite, à la droite reliant le centre du soleil au centre de la planète.
- La direction du segment Oj, qui est parallèle à la vitesse de la planète est parallèle à la tangente au point J de la courbe représentant l'orbite.



- Le point k de l'hodographe correspond à la vitesse au point K de l'orbite. C étant le centre de l'hodographe les angles $jCk = JSK = \theta$.

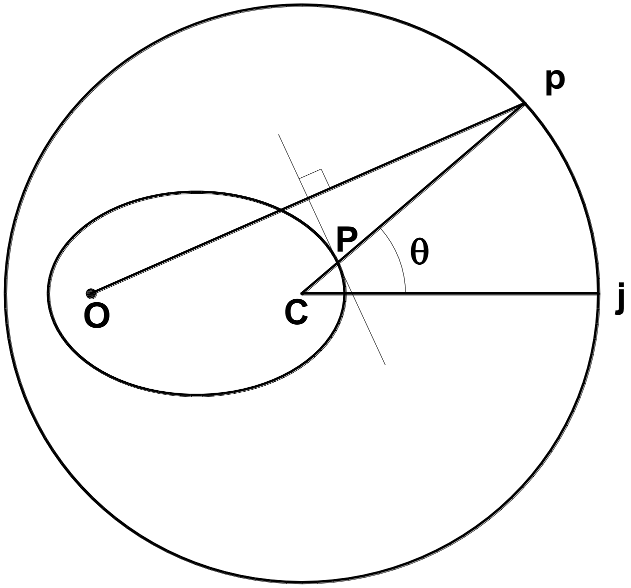
7 – La solution

On reprend l'orbite et l'hodographe :



Le point J étant le point le plus proche du soleil lui correspond sur l'hodographe le point j, le plus éloigné du point O. Si, sur les courbes, SJ est horizontal, la tangente à l'orbite en ce point sera perpendiculaire à SJ (sinon ce ne serait pas le point le plus proche de S). Sur l'hodographe Oj est donc vertical et passe par le centre du cercle. Au point P de l'orbite correspond le point p de l'hodographe et les angles jCp et JSP sont égaux.

L'idée de Feynman a été de faire tourner l'hodographe de $-\pi/2$:



Et de faire coïncider le centre du cercle-hodographe avec le centre du soleil.

Lorsque le point p décrit le cercle, un point P sur le segment Cp décrit l'orbite. En ce point P la tangent, ou la vitesse, à l'orbite doit être perpendiculaire à la droite OP, qui avant rotation de $-\pi/2$ était parallèle à la vitesse. Une courbe qui répond à cette condition est la courbe obtenue par le point d'intersection de la droite Cp avec la médiatrice du segment Op. Comme cela a été démontré en "3 – Autre génération de l'ellipse – tangente à l'ellipse" cette courbe est une ellipse dont la tangent au point P est la médiatrice du segment Op.