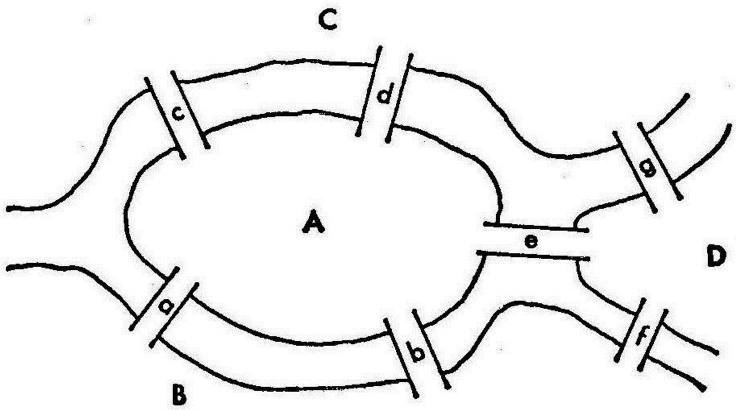
Le problème des ponts du Königsberg
Solution donnée par
Leonhard EULER



Les ponts du Königsberg (schématisés)

1.Problème posé

En Prusse, à Königsberg, il y a une île A, nommée la Kneiphof, encerclée par une rivière qui se divise en 2 bras, comme on peut le voir sur la figure. Les bras de la rivière sont traversés par 7 ponts : a, b, c, d, e, f et g.

Le question posée est celle-ci : quelqu'un peut-il suivre un itinéraire tel qu'il traverse chaque pont une fois et une seule ?

2 Modélisation du problème

Une traversée AB indique que le voyageur est passé de la région A à la région B en empruntant l'un des ponts a ou b. La première lettre indique la région d'où l'on vient et la seconde celle où on arrive. Si le voyageur va de B à D en empruntant le pont f, cette traversée sera représentée par les lettres BD. Deux traversées successives AB et BD sera indiquée par les 3 lettres ABD.

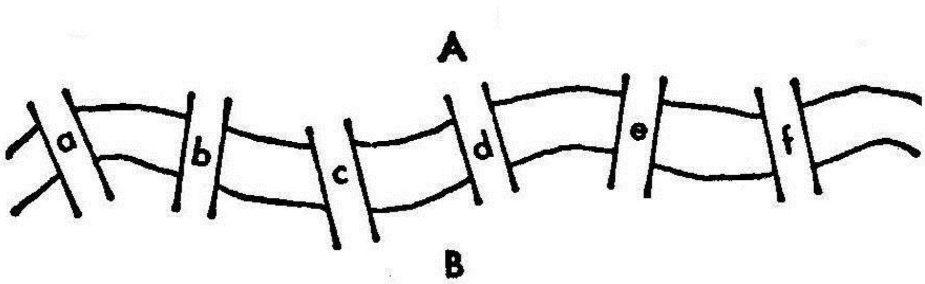
De la même façon, si le voyageur poursuit son itinéraire et va de la région de D à C en empruntant le pont g, les 3 traversées successives sont notées ABDC. Ainsi donc un itinéraire empruntant 3 ponts sera désigné par 4 lettres. D'une façon générale, un itinéraire empruntant n ponts sera désigné par (n+1) lettres.

Cette manière de désigner les itinéraires néglige d'indiquer les ponts qui sont utilisés; si la même traversée d'une région à une autre peut être effectuée par plusieurs ponts peut importe, en effet, que le voyageur emprunte l'un plutôt que l'autre de ces ponts.

Il est clair que si le chemin suivi utilisant les 7 ponts peut exister tel que chaque pont soit utilisé une fois et une seule, alors ce chemin doit être représenté par 8 lettres et ces lettres doivent être disposées de telle façon que les lettres A et B figurent à côté l'une de l'autre autant de fois qu'il y a de ponts reliant ces 2 régions, donc 2 fois uniquement. De même pour A et C, A et D, B et D et C et D.

Si on peut démontrer qu'un tel arrangement ne peut pas exister, il sera inutile de le chercher.

3 Nombre impair de ponts reliant 2 régions



Si un seul pont, le pont a, conduit à la région A, la lettre A ne figurera qu'une seule fois dans l'itinéraire, que le voyageur parte de A passe par A ou arrive à A.

Si 3 ponts conduisent à la région A, la lettre A figurera 2 fois dans l'itinéraire, par exemple, partant de la région A : AB..DAC : passage de A en B,..passage de D en A suivi du passage de A en C. Si le voyageur ne part pas de A : …BAC..DAE…

De même s'il y a 5 ponts conduisant à la régions A, la lettre A figurera 3 fois dans l'itinéraire.

D'une façon général si le nombre de ponts conduisant à la régions A est n=(2p-1), la lettre A figurera p fois dans l'itinéraire, p=(n+1)/2.

Itinéraires possibles ou impossibles

Cas des ponts du Koenigsberg

Nombre de ponts : 7

Nombre de lettres dans l'itinéraire, s'il existe : 8

Régions	n	p
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
	Total	**9**

n est le nombre de ponts conduisant à la région

p est le nombre de fois où la lettre doit figurer dans l'itinéraire.

En additionnant le nombre de fois où devraient figurer les lettres des régions A, B C et D on trouve 9. Ce nombre étant différent de 8, il n'y a pas d'itinéraire possible.

Remarque sur les îles de départ ou d'arrivée

- 1 pont conduit à l'île A. cette île ne peut être qu'un point de départ ou d'arrivée de l'itinéraire.
- 3 ponts conduisent à l'île A. Cette île peut être le point de départ, d'y repasser, mais il sera impossible d'y revenir : AB…CAD… , les 3 ponts ont été utilisés.
  Une autre possibilité : si le départ a lieu d'une autre île, un passage par cette île utilise 2 des 3 ponts. La seule possibilité restante est que cette île soit le point final de l'itinéraire.
  → Cette île ne peut être qu'un point de départ ou d'arrivée de l'itinéraire.
- (2p+1) ponts conduisent à l'île A. Il est facile de généraliser ce qui a été dit ci-dessus.
- **Conclusion** : comme il n'y a qu'un point de départ et un point d'arrivée, il sera impossible de trouver un itinéraire s'il y a plus de 2 îles desservies par un nombre impair de ponts. Au Koenigsberg, il y avait 4 îles desservies par un nombre impair de ponts. Il n'y avait donc pas de solution.

S'il y a 2 îles desservies par un nombre impairs de ponts, si l'itinéraire est possible il devra partir de l'une de ces 2 îles et se terminer dans le seconde.

4 Nombre pair de ponts reliant 2 régions

S'il y a 2 ponts conduisant à la région A, le cas sera différent suivant que le voyageur part de A ou passe par A.

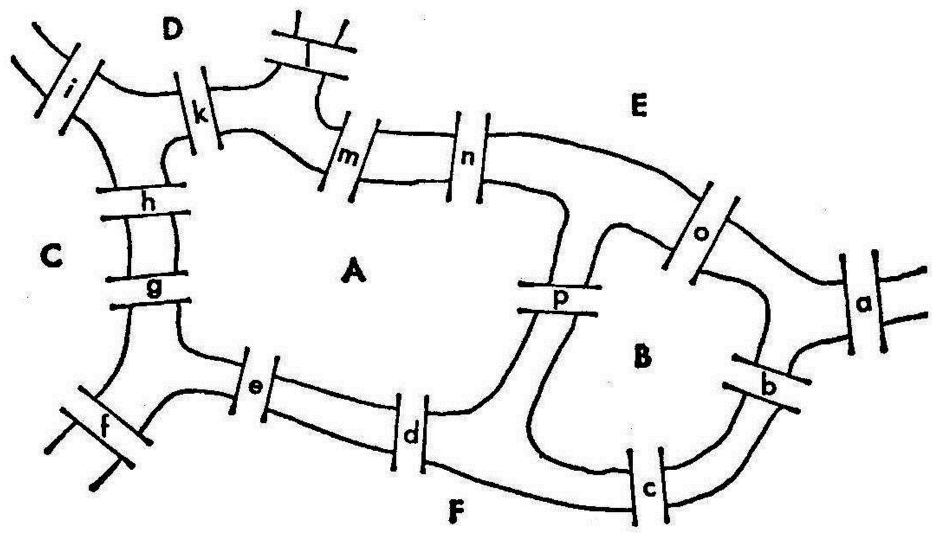
S'il part de A, la lettre A devra figurer 2 fois dans l'itinéraire, la première fois indiquant qu'il sort de A, la 2ème indiquant qu'il y entre : AB….FA.

S'il part d'une autre région, la lettre A ne figurera qu'une seule fois : B..CAD..

S'il y a 4 ponts conduisant à la région A :
Partant de A : AB..CAD..EA, la lettre A figurera 3 fois. L'itinéraire part de A et finit en A.
Partant d'une autre région : B…CAD..EAF.., la lettre A figurera 2 fois.

D'une façon général, s'il y a n=2p ponts conduisant à la région A, la lettre A devra figurer

- (p+1) fois si l'itinéraire part de A
- p fois si l'itinéraire ne part pas de A



5 Méthode de détermination de la possibilité

On appelle "nombre clef" le (nombre de ponts +1).

15 ponts	Nombre clef : 16	
Régions	Ponts	p
A*	8	8/2 = **4**
B*	4	4/2 = **2**
C*	4	4/2 = **2**
D	3	(3+1)/2 = **3**
E	5	(5+1)/2 = **3**
F*	6	6/2 = **3**
Total	**30**	**16**

Dans la première colonne est écrit le nom de l'île. Un astérisque indique que le nombre de ponts conduisant à cette région est pair.

Dans la deuxième colonne sont portés les nombres de ponts conduisant à la région indiquée dans la colonne 1.

Dans la troisième colonne sont indiqués les nombres de fois que la lettre de la colonne 1 doit apparaître dans l'itinéraire.

Le nombre clef étant égal au nombre de fois où les différentes lettres doivent apparaître, un itinéraire est possible, à condition de partir d'une des 2 îles D ou E desservies par un nombre impair de ponts et de terminer à l'autre.

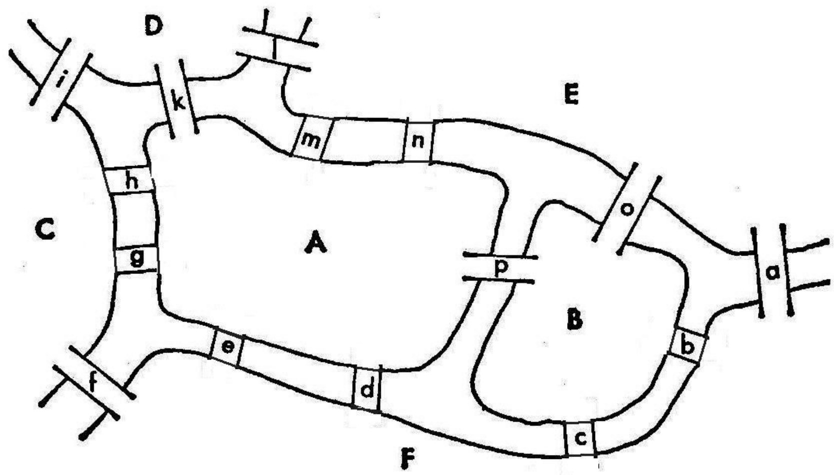
Si l'itinéraire partait d'une région desservie par un nombre pair de ponts, par exemple A, cette lettre devrait apparaître une fois de plus. Le total de la colonne 3 deviendrait 17, différent du nombre clé.

Remarque

1. La somme des termes de la deuxième colonne est égale au double du nombre de ponts. En effet chaque pont est compté deux fois, une fois dans chacune des 2 régions où il conduit. Ce nombre est donc pair. Cela signifie que le nombre de régions desservies par un nombre impair de ponts est pair.
2. Si toutes les régions sont desservies par un nombre pair de ponts, la somme de la troisième colonne est égale au nombre de ponts, mais il faut rajouter la lettre de l'île de départ, la somme devient alors égale au nombre clef. Et la solution est possible.

6 Recherche de l'itinéraire

Eliminons, par la pensée, les pairs de ponts conduisant d'une région à une autre :



Le problème devient :

7 ponts	Nombre clef : 8	
Régions	Ponts	p
A*	2	1
B*	2	1
C*	2	1
D	3	2
E	3	2
F*	2	1
Total	**14**	**8**

Itinéraires possibles dans le schéma réduit :
DCFEBADE
DABEFCDE
DEFCDABE
Etc…

Itinéraires réelles :
A partir d'un itinéraire écrit dans le schéma réduit, lorsque le voyageur se trouve dans une région dont 2 ponts ont été enlevés, par la pensée, avec une région voisine, il peut faire un aller et retour dans cette région voisine. Par exemple en partant du premier itinéraire réduit :
DC-**AC**-F-**AF**-**BF**-EBA-**EA**-DE

7 Conclusion

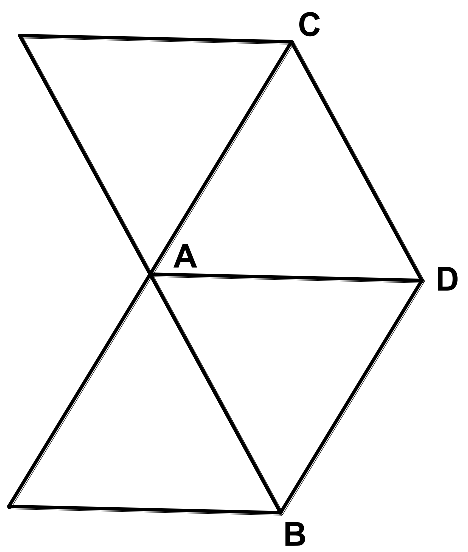
Si le nombre de régions desservies par un nombre impair de ponts est supérieur à 2, il n'y a pas d'itinéraires possibles.

Si le nombre de régions desservies par un nombre impair de ponts est égal à 2, il des itinéraire possibles partant d'une de ces 2 régions et se terminant à l'autre.

Si toutes les régions sont desservies par un nombre pair de ponts, il est possible de partir de n'importe quelle région.

Si on remplace les îles par des points et les ponts par des lignes reliant ces points, le problème devient : est-il possible de dessiner cette figure sans lever le crayon en passant une fois et une seule par chacune des lignes. La réponse est la même : cela est possible s'il n'y a pas plus de 2 points où arrivent un nombre impair de lignes. Il faut alors partir de l'un de ces 2 points et terminer à l'autre.

Par exemple l'équivalent du problème des ponts du Königsberg est illustré parle dessin suivant :



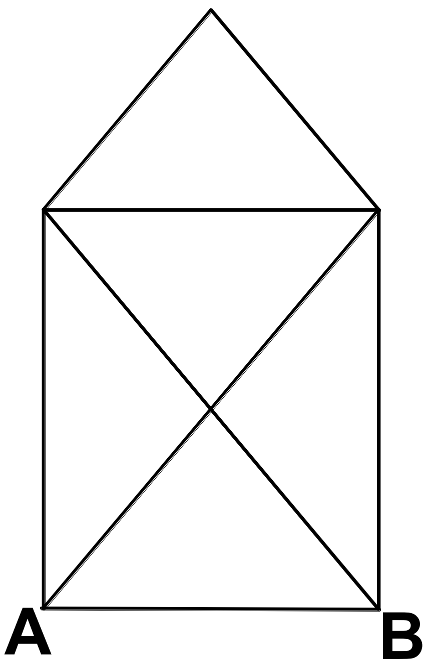
L'île A est représentée par un point A, les régions qui régions B, C et D par les points B, C et D.

Les ponts sont représentés par des lignes, droites ou brisées, reliant 2 points.

Une ligne, si elle est brisée, représente en chaque point où elle est brisée, l'équivalent d'un région avec 2 ponts. C'est-à-dire qu'elle ne modifie pas la possibilité de la solution.

En A arrivent 5 lignes, en B, en C et en D 3 lignes.En 4 points arrivent un nombre impair de lignes. La solution est impossible.

Autre exemple :



Il n'y a que les 2 points A et B où arrivent un nombre impair de lignes. La solution est possible en partant de l'un de ces 2 points, et en finissant à l'autre, par exemple partir de A et arriver en B.