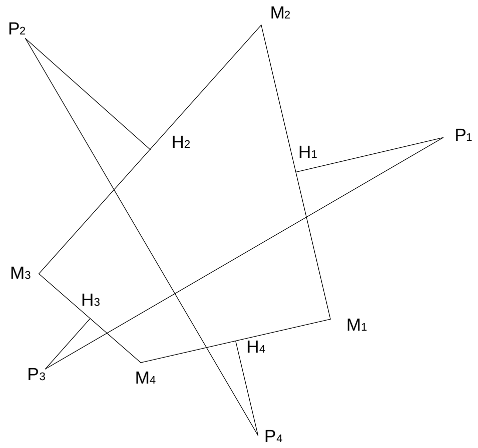

Enoncé

A partir du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$, on construit 4 points P_1, P_2, P_3 et P_4 de la façon suivante pour le point P_1 : H_1 étant le milieu du segment M_1M_2, o, porte un segment H_1P_1 égal à la moitié de la longueur du segment M_1M_2 et perpendiculaire à M_1M_2.
On fait de même pour les 3 autres points M_1, M_2 et M_3.

Les segments P_1P_3 et P_2P_4 sont orthogonaux et de m^me longueur.

Démonstration

Les 4 points $M_1M_2M_3M_4$ sont les images des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4. Le point H_1 a pour affixe $h_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}$, le vecteur $\overrightarrow{M_1H_1}$ est l'image du nombre complexe $\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{H_1P_1}$ est obtenu en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{M_1H_1}$ de $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. L'affixe p_1 du point P_1 est donc

$$p_1 = \frac{z_2 + z_1}{2} - i\,\frac{z_2 - z_1}{2}$$

$$p_2 = \frac{z_2 + z_3}{2} - i\,\frac{z_3 - z_2}{2}$$

et de même

$$p_3 = \frac{z_3 + z_4}{2} - i\,\frac{z_4 - z_3}{2}$$

$$p_4 = \frac{z_4 + z_1}{2} - i\,\frac{z_1 - z_4}{2}$$

Le nombre complexe ζ_{13} associé au vecteur $\overrightarrow{P_1P_3}$ est $\zeta_{13} = p_3 - p_1$

$$\zeta_{13} = \frac{z_3 + z_4 - z_2 - z_1}{2} - i\,\frac{z_4 - z_3 - z_2 + z_1}{2}$$

De même le ζ_{24} associé au vecteur $\overrightarrow{P_2P_4}$ est $\zeta_{24} = p_4 - p_2$

$$\zeta_{24} = \frac{z_4 + z_1 - z_2 - z_3}{2} - i\,\frac{z_1 - z_4 - z_3 + z_2}{}$$

On constate que $\zeta_{24} = i\zeta_{13}$ et donc les 2 vecteurs $\overrightarrow{P_1P_3}$ et $\overrightarrow{P_2P_4}$ ont même modules et sont orthogonaux.

Remarque

Si on change i en $-i$ il viendra $\zeta_{24} = -i\zeta_{13}$ et les points P_1, P_2, P_3 et P_4 seront obtenus en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{M_1H_1}$ de $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$