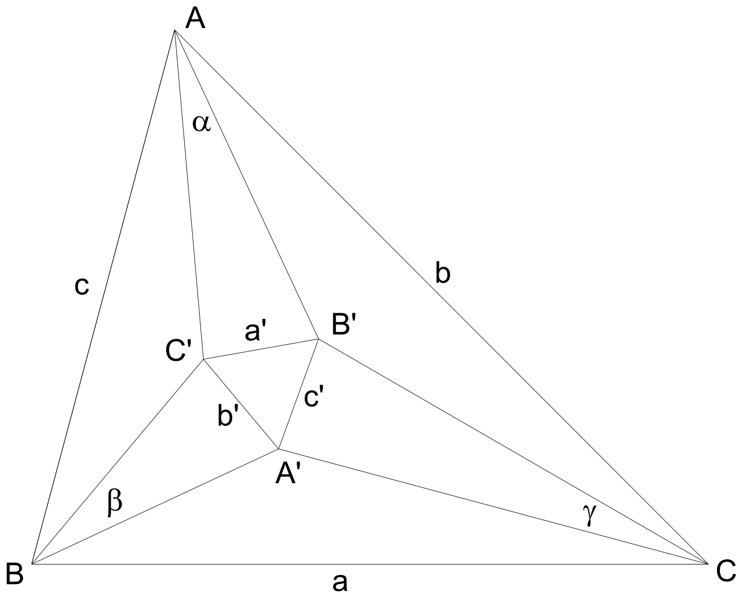
# Théorème de Morley

## 1. Enoncé




Dans un triangle ABC, les trisectrices des angles aux sommets se coupent pour former un nouveau triangle A'B'C'.

Ce triangle est équilatéral.

## 2. Une démonstration géométrique

### 2.1. Données

Les angles aux sommets du triangle ABC sont $BAC = 3\alpha$, $CBA = 3\beta$ et $BCA = 3\gamma$ et les longueurs des côtés $a, b$ et $c$. $R$ est le rayon de son cercle circonscrit.

Les longueurs des côtés du triangle A'B'C' sont $a', b'$ et $c'$.

### 2.2. Calcul du côté a'

Dans le triangle ABC', dont les angles valent $\alpha, \beta$v et $\left[\pi - (\alpha + \beta)\right]$

$$\boxed{\frac{AC'}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\left[\pi - (\alpha + \beta)\right]} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)}} \qquad (1.1)$$

Comme $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi$, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3} - \gamma$

On sait que dans le triangle ABC

$$\frac{a}{\sin(3\alpha)} = \frac{b}{\sin(3\beta)} = \frac{c}{\sin(3\gamma)} = 2R$$

et donc $AB = c = 2R\sin(3\gamma)$. Ce qui donne

$$\boxed{AC' = 2R\frac{\sin\beta\sin(3\gamma)}{\sin(\pi/3 - \gamma)}} \qquad (1.2)$$

$\sin(3\gamma) = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma$ peut s'écrire

$$\sin(3\gamma) = 4\sin\gamma\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\gamma\right] = 4\sin\gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\gamma\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\gamma\right)$$

Comme $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, et que $\begin{cases} \sin\frac{\pi}{3} + \sin\gamma = 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right) \\ \sin\frac{\pi}{3} - \sin\gamma = 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \end{cases}$

Le produit

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\gamma\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\gamma\right) = \left[2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\right]\left[2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)\right]$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)$$

Et

$$\boxed{\sin 3\gamma = 4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)} \qquad (1.3)$$

En reportant cette valeur dans (1.2) il reste

$$\boxed{AC' = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)} \qquad (1.4)$$

On calculerait de même

$$\boxed{AB' = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)} \qquad (1.5)$$

Dans le triangle AB'C'

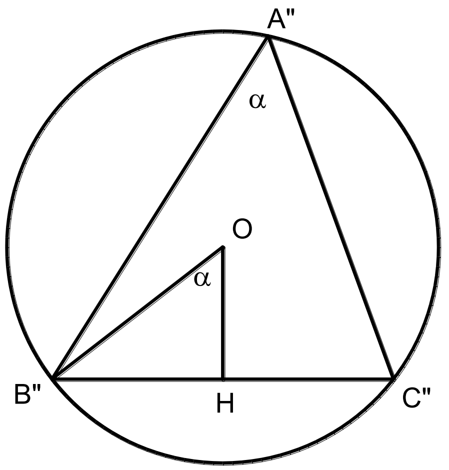
$$a'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \times AC'\cos\alpha$$

Soit :

$$\boxed{a'^2 = \left(8R\sin\beta\sin\gamma\right)^2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)\cos\alpha\right]} \qquad (1.6)$$

La somme des angles $\alpha + \left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) + \left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) = \left(\alpha + \beta + \gamma\right) + 2\frac{\pi}{3}$.

Comme $(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\pi}{3}$, $\alpha+\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)+\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)=\pi$. Ces 3 angles peuvent être les angles au sommet d'un triangle A"B"C" inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R" :




Dans ce triangle :

$$A''B''=2R''\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right),\ A''C''=2R''\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$$

$B''C''=2B''H=2R''\sin\alpha$, $H$ étant le milieu du côté B"C".

On a également :
$$B''C''^2=A''B''^2+A''C''^2-2A''B''\times A''C''\cos\alpha.$$

En remplaçant par les valeurs calculées des côtés :

$$(2R'')^2\sin^2\alpha=(2R'')^2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\cos\alpha\right]$$

C'est à dire :

$$\boxed{\sin^2\alpha=\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\cos\alpha} \qquad (1.7)$$

En reportant cette valeur de $\sin^2\alpha$ dans (1.6), on obtient :

$$\boxed{a'^2=(8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2} \qquad (1.8)$$

Cette expression est symétrique en $(\alpha,\beta,\gamma)$. On obtiendra donc :

$$\boxed{a'=b'=c'=8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}}$$

Le triangle A'B'C' est équilatéral.