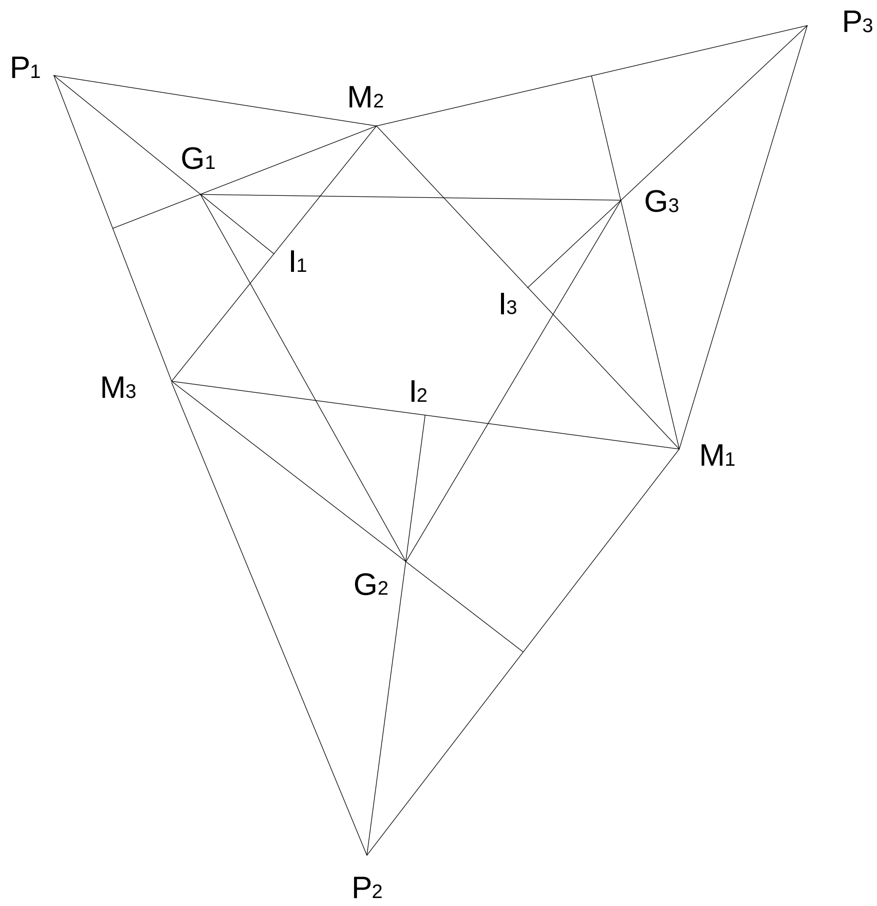
Théorème de Napoléon



Sur chacun des côtés d'un triangle quelconque $M_1M_2M_3$ on construit un triangle équilatéral extérieur au triangle. Les sommets des centres de gravité de ces 3 triangles équilatéraux forment un triangle équilatérale.

\- - - - - - - - - -

Dans le triangle équilatérale $M_1M_2P_3$ le centre de gravité G_3 est tel que $\overrightarrow{I_3G_3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{I_3P_3}$ et $\left|\overrightarrow{I_3P_3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ et $\left|\overrightarrow{I_3G_3}\right| = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$.

Si z_1, z_2 et z_3 sont les affixes des points M_1, M_2 et M_3, l'affixe de I_3, milieu du segment M_1M_2 est $\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ et l'affixe du point G_3:

$$g_3 = \frac{z_1+z_2}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\frac{z_2-z_1}{2}$$ et, permutation circulaire :

$$g_1 = \frac{z_2+z_3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\frac{z_3-z_2}{2}, \quad g_2 = \frac{z_3+z_1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\frac{z_1-z_3}{2}$$

Aux vecteurs $\overrightarrow{G_1G_2}$ et $\overrightarrow{G_1G_3}$ sont associés les nombres complexes

$$\zeta_{12} = g_2 - g_1 = \frac{z_1-z_2}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\frac{z_1+z_2-2z_3}{3} \text{ et } \zeta_{13} = g_3 - g_1 = \frac{z_1-z_3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\frac{-z_1+2z_2-z_3}{2}$$

En multipliant ζ_{12} par $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, on obtient le nombre complexe associé au vecteur obtenu en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{G_1G_2}$ de $\frac{\pi}{3}$.

$$\zeta_{12}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \zeta_{12}\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{z_1-z_3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\frac{-z_1+2z_2-z_3}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[\left(z_1-z_2\right) + \left(z_1+z_2-2z_3\right) - \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\left(z_1+z_2-2z_3\right) + \mathrm{i}\sqrt{3}\left(z_1-z_2\right)\right]$$

$$= \frac{z_1-z_3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\frac{-z_1+2z_2-z_3}{2}$$

$$\boxed{\zeta_{12}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \zeta_{13}}$$

Les 2 côtés G_1G_2 et G_1G_3 sont égaux et forment un angle de 60°. Le triangle $G_1G_2G_3$ est équilatéral.